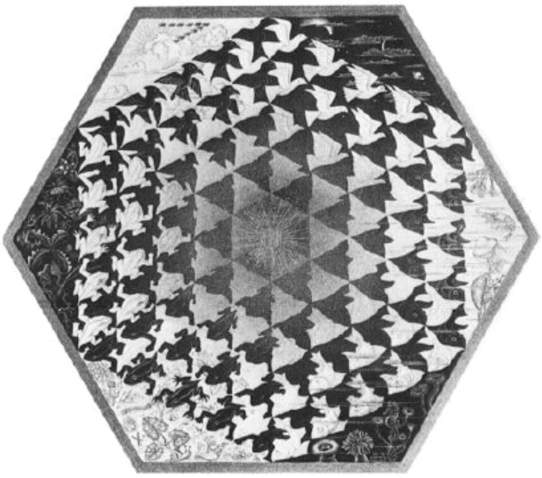
Institut de Recherche en Informatique de Nantes
équipe modélisation géométrique et infographie interactive

Formalisation des propriétés en modélisation déclarative à l'aide des ensembles flous



E. Desmontils

IRIN
2, rue de la Houssinière
44072 Nantes Cedex 03

Rapport de recherche IRIN - 106[1]
Décembre 1995

Université de Nantes **Ecole Centrale de Nantes**

[1] In 3IA'96, 3-4 avril 1996, Limoges, France, pp. 87-105

Table des matières

Table des courbes et figures

Remerciements

Je voudrais particulièrement remercier Daniel PACHOLCZYK, professeur au LERIA (Université d'Angers), pour son aide et ses conseils avisés et Michel LUCAS, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, pour ses nombreuses relectures et ses encouragements.

1. Introduction

Un des objectifs principaux de la modélisation déclarative ([LMM89]) est d'obtenir une ou plusieurs scènes répondant à un ensemble de propriétés appelé description. La notion de propriété est un élément essentiel en modélisation déclarative. Elle permet de décrire la scène que l'on désire concevoir. Elle intervient pendant la génération pour vérifier si une scène est correcte mais aussi pendant la visualisation afin de déterminer un bon point du vue et un bon mode de visualisation.

Dans les modeleurs CAO classiques, une "description" est évaluée de façon précise et quantitativement. Chaque objet est décrit par des valeurs précises. Le concepteur est obligé de déterminer tous les paramètres et leur valeur. Pour les modeleurs déclaratifs, présentés dans [Des95], les descriptions peuvent être des concepts imprécis, vagues. Elles sont essentiellement qualitatives. Ceci n'empêche pas la possibilité de faire des descriptions précises.

La formalisation de ces propriétés n'a jamais fait l'objet d'une étude poussée. Quelques tentatives de formalisation ont eu lieu dans [Col90], [Col92], [Mar90], [Paj94], [Chau94]… L'idée était de formaliser une propriété par une mesure et un comparateur.

L'objectif de ce travail est <u>d'étudier un formalisme inspiré de la Théorie des Sous-Ensembles Flous</u> (T.S.E.F.) pour gérer les propriétés utilisées dans un modeleur déclaratif. La théorie de base est la T.S.E.F. mais les modificateurs et les opérateurs flous sont interprétés un peu différemment. Ce formalisme permet de manipuler les propriétés aussi bien en phase de vérification de forme ([Col90], [Mar90], [Paj94], [Pou94]…) qu'en phase de génération par tirage aléatoire sous contraintes dans des intervalles ([Don93], [Chau94]…). Les notions principales de la T.S.E.F. sont présentées en Annexe 1.

Nous allons d'abord définir l'environnement de définition des propriétés (§2 et 3). Ensuite, nous étudierons les propriétés simples et paramétrées qui portent seulement sur une scène (§4 et 5). Puis, l'utilisation des opérateurs flous sur ces propriétés sera abordée (§6). Nous étudierons ensuite les propriétés relatives et les propriétés de comparaison qui portent sur deux sous-scènes (§7, 8 et 9). Après, nous verrons quelques descriptions particulières basées sur les propriétés n-aires (§10) et la négation (§11). Enfin, nous aborderons une méthode pour évaluer et interpréter une description (§12, 13 et 14).

2. Domaine de description et mesure

Lorsqu'on décrit un objet, il existe un certain nombre de propriétés ayant en commun une même caractéristique. Par exemple, si on dit *"le cube est grand"*, *"le cube est de 2m"*, *"le cube est beaucoup plus grand que la pyramide"* ou *"le cube n'est pas petit"*, on fait référence à une notion, commune aux propriétés "*grand*", "*2m*" et "*petit*", à savoir la "*taille*". Nous allons appeler cela un domaine de description. Un <u>domaine de description</u> D est défini comme l'ensemble des valeurs que peut prendre une scène (ou une forme) du point de vue d'une notion (ou caractéristique). En T.S.E.F., un domaine de description est considéré comme un référentiel associé à une variable linguistique[2].

<u>Remarques</u> :

- D dépend du domaine considéré. Il peut être à plusieurs dimensions (r, c…). Cependant, en pratique, il est sur une dimension (énumération d'éléments ou sous-ensembles de b, n, z ou r) voire deux dans le cas de notions spécifiques ou de comparaisons.
- D est borné. Cette contrainte est vérifiée soit naturellement (sémantique du domaine) soit artificiellement (contrainte d'implémentation).
- Toute forme peut être décrite par un ensemble de domaines de description pas forcément disjoints.

2 voir Annexe 1, §6.

Pour une scène donnée, la valeur qu'elle représente dans un domaine est déterminée à l'aide d'une fonction (quand elle existe) caractéristique de la notion. Par exemple, le domaine *"taille"* va évaluer une scène à l'aide d'une fonction calculant sa hauteur en mètres. Nous allons appeler cette fonction une mesure du domaine. La mesure d'une forme pour un domaine D est une fonction qui permet de déterminer à quel élément de ce domaine la forme ou la scène est associée. Elle est définie sur l'univers des formes U_f telle que :

$$
\begin{array}{lll}
m_D : U_f & \rightarrow & D \\
\quad f & \rightarrow & m_D(f)
\end{array}
$$

Nous supposerons que tout domaine possède une mesure. Par exemple, si un concepteur veut définir une propriété *"beauté"* (même si c'est contestable), l'ensemble des valeurs du domaine sont : *"Vrai"* et *"Faux"*. Ce domaine possède une formule ("magique" !?) qui va déterminer la "valeur" d'une forme pour cette propriété.

Dans certains cas, comme pour le domaine concernant les distances entre sous-scènes (domaine où sont définies les propriétés *"loin de"*, *"proche de"*...), la mesure ne prend pas en compte une mais plusieurs "scènes" ou plutôt sous-scènes. La définition du domaine se généralise en domaine n-aire. Un domaine est dit n-aire si sa mesure est définie sur plusieurs formes (scènes ou sous-scènes). Nous aurons alors :

$$
\begin{array}{lll}
m_D : U_f \times U_f \times \ldots & \rightarrow & D \\
\quad f_1, f_2, \ldots, f_n & \rightarrow & m_D(f_1, f_2, \ldots, f_n)
\end{array}
$$

3. Propriétés d'un domaine

Un domaine comporte un certain nombre de propriétés de toutes sortes. Pour le domaine *"taille"*, il a par exemple *"grand"*, *"moyen"* et *"petit"*. Ces propriétés sont définies sur certaines valeurs du domaine. Cependant, il est souvent difficile de préciser les valeurs limites pour une propriété donnée. Par exemple, comment trouver les bornes d'un intervalle [a,b] pour lequel toutes les valeurs (hauteurs) sont considérées comme *"grandes"* ? Pourquoi les valeurs $a-\varepsilon$ et $b+\varepsilon$ (ε étant très petit) ne sont pas considérées comme *"grandes"* ?

Au lieu d'être obligé de donner des limites précises, comme c'est le cas dans la plupart des modeleurs déclaratifs actuels, nous proposons de représenter une propriété d'un domaine D comme une sorte de sous-ensemble flou[3]. Ainsi, les valeurs appartenant au noyau[4] de la propriété *"grand"* sont absolument grandes et celles s'écartant du noyau sont de moins en moins grandes pour de venir absolument "non grandes" en dehors du support[5].

Plusieurs types de propriétés sont mis en évidence en fonction de l'ordre du domaine sur lequel elles sont définies :

- les propriétés simples et les propriétés paramétrées qui portent sur une seule scène (ou sous-scène),
- les propriétés relatives et les propriétés de comparaison qui sont des relations binaires entre deux objets de la scène,
- les propriétés définies comme des relations n-aires entre plusieurs objets.

En pratique, les propriétés les plus courantes sont les propriétés simples (*"A est assez grand"*), les propriétés paramétrées (*"A est entre 1m70 et 1m90"*), les propriétés relatives (*"A est très loin de B"*) et les propriétés de comparaison (*"A est plus grand que B"*).

3 voir Annexe 1, Définition 1.
4 voir Annexe 1, Définition 3.
5 voir Annexe 1, Définition 2.

4. Propriétés simples

4.1. Définition

L'objectif est d'étudier des descriptions utilisant une propriété simple, c'est-à-dire de pouvoir traiter : *"Le menhir est* ***assez*** *grand"*, *"L'immeuble est* ***très*** *grand"*, *"Le motif est* ***très très*** *petit"*… Nous voulons donc être capable d'interpréter des descriptions de la forme :

"X est ***Modificateur*** *Propriété_Simple".*

Ce sont des expressions linguistiques (très souvent adverbiales).

Un modificateur, ou opérateur de modification, porte sur la sémantique de la propriété. En effet, dire *"Le cube est* ***assez*** *grand"* et *"Le cube est* ***très*** *grand"* change l'idée de taille que l'on a du cube. Dans la seconde assertion, cet objet possède une taille plus importante et plus précise que dans la première.

Les modificateurs sont assez nombreux, en voici quelques uns :

très	*assez*	*normalement*
peu	*assez peu*	*très peu*
extrêmement	*follement (!)*	*bien*
tout	*extraordinairement*	*immensément (!)*
suffisamment	*passablement*	*terriblement (!)*
moyennement	*faiblement*	*très très*
très très peu	…	

Pour simplifier le traitement, nous choisirons de ne traiter que : ***"extrêmement"***, ***"très très"***, ***"très"***, ***"assez"***, ***"normalement"***, ***"assez peu"***, ***"très peu"***, ***"très très peu"*** et ***"extrêmement peu"***. Attention, il peut arriver que pour certaines propriétés, certains modificateurs soient autorisés et d'autres pas.

Remarque : L'opérateur ***"normalement"*** correspond à l'opérateur par défaut ***"ø"*** appelé aussi opérateur vide ou modificateur vide. A partir de maintenant, *"X est Propriété"* est équivalent à *"X est* ***ø*** *Propriété"* ou *"X est* ***normalement*** *Propriété"* (*"grand"* est équivalent à *"****ø*** *grand"* ou *"****normalement*** *grand"*).

Une <u>propriété simple</u> P est un sous-ensemble flou d'un domaine D. C'est une valeur possible d'une variable linguistique associée à D. Cette propriété est définie par la fonction d'appartenance μ_P telle que :

$$\begin{array}{llll} \mu_P : & D & \rightarrow & [0,1] \\ & t & \rightarrow & \mu_P(t) \end{array}$$

L'interprétation d'une propriété simple P sur un domaine D associé au modificateur par défaut (par exemple *"A est P"*) consiste à appliquer :

$$\begin{array}{lllll} U_f & \rightarrow & D & \rightarrow & [0,1] \\ f & \rightarrow & t=m_D(f) & \rightarrow & \mu_P(t) \end{array}$$

Parmi les propriétés, certaines n'acceptent que l'opérateur vide. En effet, on ne peut pas dire *"Le nombre de voxels dans la matrice est* ***très*** *premier"*. Par contre, on peut dire *"Le nombre de voxels de la matrice est* ***très*** *important"*. Nous allons appeler les propriétés qui acceptent d'autres modificateurs que le modificateur vide des <u>propriétés modifiables</u>. Nous posons le <u>postulat</u> suivant : une propriété simple qui admet des modificateurs autres que le modificateur vide est une propriété définie par un ensemble flou convexe dans l'univers r des nombres réels. Autrement dit, une propriété modifiable est une propriété définie à l'aide d'un intervalle flou[6].

4.2. La fonction d'appartenance d'une propriété simple

Le choix de la fonction d'appartenance est a priori libre. Il en existe un grand nombre dans la littérature sur les ensembles flous (voir Annexe 3).

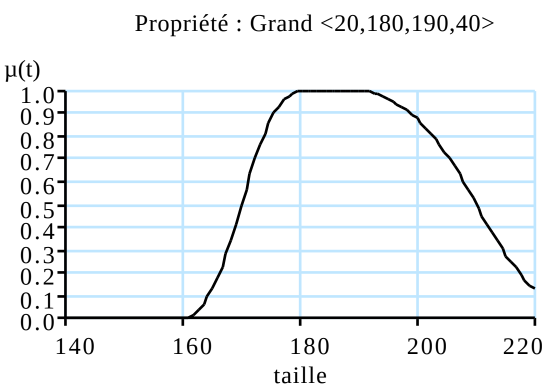
Pour faciliter les traitements, nous considérerons que les propriétés modifiables sont définies à l'aide de cas particuliers de fonctions d'appartenance L-R (voir Annexe 3, §4.2.). L'expression d'une fonction d'appartenance L-R d'une propriété P d'un domaine D définie par le quadruplet $<\alpha_p,a_p,b_p,\beta_p>$ et les fonctions $L_p(x)$ et $R_p(x)$ devient :

$$\mu_{<\alpha_p,a_p,b_p,\beta_p>,\ L_p,\ R_p} : \quad D \rightarrow [0,1]$$

$$t \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } t < a_p-\alpha_p \\ L_p((a_p - t_p) / \alpha_p) & \text{si } (\alpha_p \neq 0) \text{ et } (a_p-\alpha_p \leq t < a_p) \\ 1 & \text{si } a_p \leq t \leq b_p \\ R((t_p - b_p) / \beta_p) & \text{si } (\beta_p \neq 0) \text{ et } (b_p < t \leq b_p+\beta_p) \\ 0 & \text{si } t > b_p+\beta_p \end{cases}$$

Une propriété P d'un domaine D définie par une fonction L-R sera donc définie par : P = {D, $<\alpha_p,a_p,b_p,\beta_p>$, $L_p(x)$, $R_p(x)$}. Si la fonction n'est pas L-R, nous aurons : P = {D, μ_p}

4.3. Exemple



Courbe 1 : Une fonction d'appartenance possible pour la propriété "ø Grand"

Avec la propriété *"Grand"* définie par exemple par {*"taille"*, <20,180,190,40>, $L_4(x)$, $R_4(x)$}, nous avons pour l'assertion (illustrée par la courbe 1) *"A est grand"* :

$$U_f \rightarrow D_{taille} \rightarrow [0,1]$$

$$f \rightarrow t=m_{taille}(f) \rightarrow \mu_{grand}(t) = \mu_{<20,180,190,40>,\ L4,\ R4}(t)$$

[6] voir Annexe 1, Définition 18.

4.4. Première solution d'interprétation

Une première solution pour traiter ce genre de description est de construire une propriété pour chaque combinaison (modificateur, propriété). Ainsi, pour la propriété *"Grand"*, nous aurons les propriétés : *"Extrêmement_Grand"*, *"Très_Grand"*, *"Assez_Grand"*, *"ø_Grand"* ou *"normalement_Grand"*, *"Assez_peu_Grand"*, *"Très_peu_Grand"*…

Ce type de représentation des propriétés possède un avantage : les différentes propriétés sont optimisées par rapport à leur sémantique. Cependant, le concepteur de l'application doit implanter un grand nombre de propriétés (sauf s'il possède un bibliothèque de propriétés). Cela risque donc d'être lourd à implémenter. Nous allons donc essayer de généraliser les opérateurs afin d'alléger le plus possible le travail du concepteur d'application.

4.5. Deuxième solution d'interprétation

L'objectif de cette solution est de déterminer des fonctions génériques, associées aux modificateurs. Le concepteur se contente de définir la propriété principale. Il suffit ensuite d'appliquer le modificateur générique requis. Ainsi, pour la propriété *"Grand"*, nous avons : *"**Extrêmement**(Grand)"*, *"**Très_peu**(Grand)"*, *"**ø**(Grand)"*…

La fonction générique associée au modificateur s'applique sur la fonction d'appartenance de la propriété pour obtenir la fonction d'appartenance de la propriété modifiée. La fonction générique translate et contracte la fonction de la propriété proportionnellement au modificateur qu'elle représente.

Il faut cependant faire attention à la direction de la translation. En effet, *"**Très**"* ne va pas agir de la même manière sur la propriété *"Grand"* que sur *"Petit"*. En effet, sur *"Grand"*, la fonction d'appartenance est translatée vers les tailles plus importantes tandis que pour *"Petit"* c'est vers les tailles plus faibles.

Il est donc nécessaire d'associer à chaque propriété un signe :
- "+" pour les propriétés qui seront augmentées (propriétés positives),
- "-" pour celles qui seront diminuées (propriétés négatives),
- "0" pour celles qui ne seront pas translatées (propriétés neutres).

De plus, il est clair que l'importance de la translation sera fonction de l'opérateur de modification mais aussi de la sémantique de la propriété. Nous associerons donc à chaque propriété P un réel τ_p que nous appellerons coefficient de translation élémentaire.

Nous aurons alors trois cas :
- $\tau_p > 0$ pour les propriétés positives (*"Grand"*),
- $\tau_p < 0$ pour les propriétés négatives (*"Petit"*),
- $\tau_p = 0$ pour les propriétés neutres (*"Moyen"*).

Remarque : Les modificateurs n'ont pas d'effet sur les propriété neutres ($\tau_p = 0$). Nous avons alors *"**très** moyen"* équivalent à *"**ø** moyen"*.

A partir de maintenant, une propriété P d'un domaine D sera définie par : $\{D, \mu_p, \tau_p\}$ ou $\{D, <\alpha_p, a_p, b_p, \beta_p>, L_p(x), R_p(x), \tau_p\}$ (si la fonction d'appartenance est L-R). Si elle est neutre ou non modifiable, nous poserons $\tau_p = 0$.

Nous supposerons dans la suite de ce travail que les propriétés modifiées sont soit positives soit négatives et sont représentées par des fonctions d'appartenance L-R.

Comme pour les propriétés, des modificateurs accentuent la propriété et d'autres la diminuent. La direction du modificateur dépend du signe du <u>coefficient de modification</u> k_{modif} qui lui est associé. Ce coefficient rend compte aussi de la force du modificateur (***"très"*** produit une modification plus importante que ***"assez"***). Pour les modificateurs, nous avons alors :

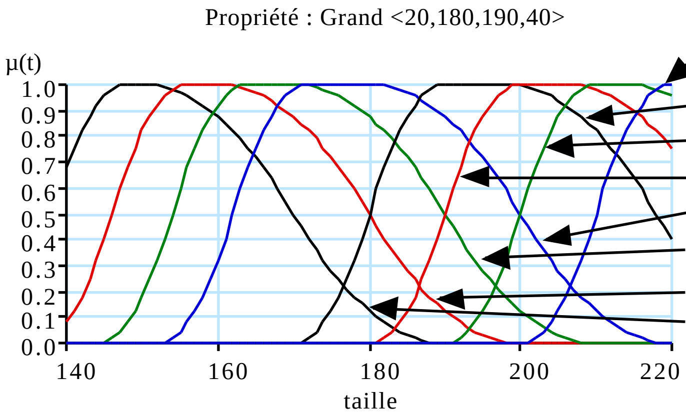
- $k_{modif} > 0$ pour les modificateurs positifs (***"très"***),
- $k_{modif} < 0$ pour les modificateurs négatifs (***"assez_peu"***),
- $k_{modif} = 0$ pour les modificateurs neutres (***"moyennement"***, ***"normalement"***).

Avec une propriété $P=\{D, <\alpha_p, a_p, b_p, \beta_p>, L_p(x), R_p(x), \tau_p\}$ et un modificateur *Modif* de coefficient de modification k_{modif}, la fonction d'appartenance de la propriété modifiée "***Modif** P*" est, en rendant compte de la translation et de la contraction :

$$\mu_{modif\ p} : D \rightarrow [0,1]$$

$$t \rightarrow \mu_{<\alpha_p,\ a_p+k_{modif}*(b_p-a_p)*10\%,\ b_p-k_{modif}*(b_p-a_p)*10\%,\ \beta_p>,\ L_p,\ R_p}(t-k_{modif}*\tau_p)$$

"$t-k_{modif}*\tau_p$" translate la fonction proportionnellement au coefficient de translation élémentaire de P (τ_p) et au coefficient propre au modificateur (k_{modif}). "$k_{modif}*(b_p-a_p)*10\%$" réduit le noyau de la propriété pour traduire la contraction. La réduction est fonction du modificateur et proportionnelle à la taille du noyau.



Modificateur	**k**
Extremement	4
Très_Très	3
Très	2
Assez	1
Assez_Peu	-1
Très peu	-2
Très_Très_Peu	-3
Extremement_Peu	-4

Courbe 2 : Modificateurs sur la fonction d'appartenance pour la propriété "ø Grand"

Remarque : Bien sûr, il est possible de choisir une autre fonction.

L'application d'un modificateur sur une fonction d'appartenance d'une propriété engendre une nouvelle fonction d'appartenance. Par conséquent, une propriété modifiée *Modif P* obtenue par l'application du modificateur *Modif* sur une propriété $P(\tau_p)$ est aussi une propriété. L'application d’un modificateur ne modifie pas les caractéristiques essentielles de la fonction d’appartenance. En particulier, la nouvelle fonction d’appartenance représente à nouveau un intervalle flou. Donc, *Modif P* est une propriété modifiable. Nous pouvons appliquer à nouveau un modificateur. Nous poserons que : $\tau_{\text{modif p}} = \tau_p$. Nous avons donc la possibilité d’appliquer :

*“X est **Modif**$_\beta$ (**Modif**$_\alpha$ Propriété)”.*

En recommençant ce raisonnement autant de fois que l’on veut, nous constatons qu’il est possible d’appliquer plusieurs modificateurs à une propriété.

En pratique, les possibilité d’application successives de modificateur sont assez restreintes. Nous pouvons, en fait, mettre en évidence les trois règles suivantes :

- *“**très**”* est le seul opérateur pouvant être répété plusieurs fois dans une même expression. Il s’applique sur une propriété dont le dernier modificateur est *“**très**”*, *“**très très**”*, *“**très très peu**”* ou *“**très peu**”*.
- On peut appliquer n’importe quel modificateur sur la propriété modifiée *“**ø** Propriété”*.
- *“**très**”* est le seul modificateur pouvant s’appliquer à une propriété modifiée autre que *“**ø** Propriété”*.

Ainsi, on construit des descriptions comme : *“L’immeuble est **très très très** grand”*, *“La scène est **très très très peu** remplie”*…

Remarque : Une propriété modifiée $P'(\tau_p)$ est dite <u>plus forte</u> (resp. <u>plus faible</u>) que la propriété d’origine $P(\tau_p)$ si la différence entre les centres de gravité[7] des noyaux est de même signe que (resp. de signe différent de) τ_p.

4.6. Influence des modificateurs sur la fonction d’appartenance

Lorsqu’on applique un modificateur sur une fonction d’appartenance d’une propriété modifiable, ce modificateur change la forme de la fonction par une translation et une contraction. Dans le cas où cette translation mène une partie de la fonction en dehors du domaine d’application, il n’y a pas de problèmes particuliers. Elle ne sera utilisée que sur la partie intérieure au domaine. Par contre, si la fonction de départ est “collée” à une borne du domaine deux situation se présentent :

- La translation se fait vers cette borne. Une partie de la fonction ne sera pas utilisable mais elle sera traitée comme une autre.
- La translation se fait vers l’autre borne. Alors se pose le problème de déterminer comment sera la nouvelle fonction (comme exemple, voir courbe 3).

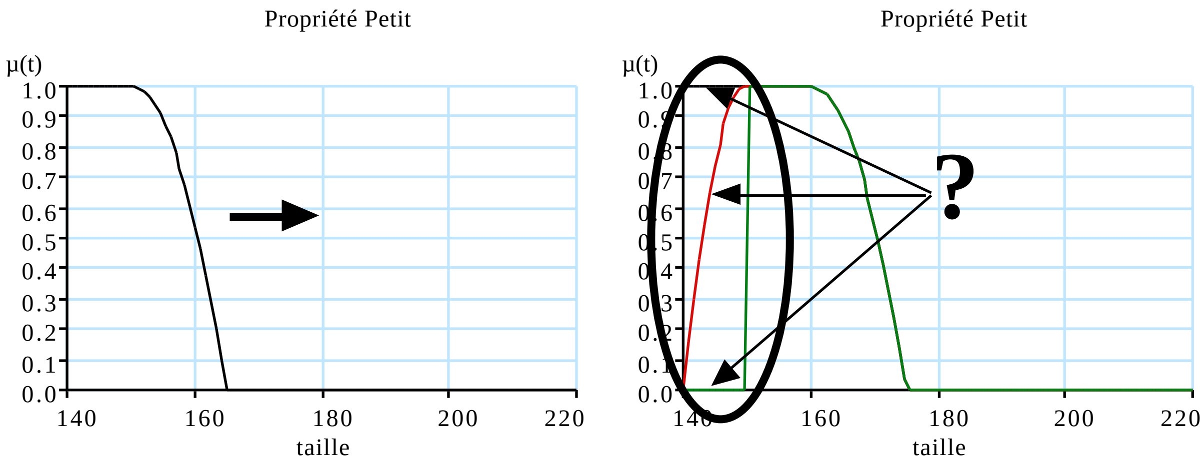
Deux situations se présentent alors :

- La fonction est définie suffisamment loin en dehors du domaine. Il n’y a alors rien a faire de particulier.
- La fonction est seulement définie dans le domaine. Il faut alors choisir la forme de la nouvelle zone.

La détermination de la nouvelle zone n’est pas une chose facile. En gros, trois attitudes sont possibles :

- On laisse le degré d’appartenance au niveau de la dernière valeur connue.
- On met à 0 pour toutes les nouvelles valeurs (selon le dicton bien connu : “Dans le doute, abstiens toi” !).
- On adopte une fonction symétrique par rapport à la partie connue.
- …

7 voir Annexe 1, Définition 12.



Courbe 3 : Modification d'une propriété définie par rapport à une borne du domaine

5. Propriétés paramétrées

Une <u>propriété paramétrée</u> est une propriété dont la fonction d'appartenance est définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll} \mu_{p,\,v} : & D & \rightarrow & [0,1] \\ & t & \rightarrow & \mu_{p,\,v}(t) \end{array}$$

La valeur v est soit :
- un élément de D,
- un couple (v_1, v_2) de D^2.

Elles sont générées de la même manière que les propriétés simples. Elles seront légèrement floues (l'intervalle support étant légèrement plus grand que l'intervalle noyau). Cependant, elles sont toutes considérées comme étant des propriétés neutres (τ_p=0). Par contre, elle se différencient des propriétés simples neutres par le fait qu'elles n'admettent comme modificateur que le modificateur vide : on ne dit pas *"A est* ***très*** *de 2m"* mais, par contre, on dit *"A est de 2m"*. Les assertions interdites comme *"A est* ***très*** *de 2m"* sont facilement repérables au moment de la saisie de la description grâce à un filtre générique. Nous interdirons par exemple : *"Objet est* ***Modificateur*** *Propriété_paramétrée"* où *Modificateur* est différent de "***ø***". Nous n'autoriserons que des descriptions de la forme :

"Objet est ***ø*** *Propriété_paramétrée".*

Ceci nous permet de construire des descriptions comme : *"A est entre 1m70 et 1m90"*, *"A est de 1m70"*. En utilisant des propriétés L-R, les paramètres sont directement portés sur le quadruplet définissant la fonction d'appartenance. Les exemples sont donc interprétés respectivement par :

$$\begin{array}{llllll} U_f & \rightarrow & D_{taille} & \rightarrow & [0,1] \\ f & \rightarrow & t=m_{taille}(f) & \rightarrow & \mu_{entre\ 1m70\ et\ 1m90}(t) = \mu_{<5,170,190,5>,\ L_{entre},\ R_{entre}}(t) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{llllll} U_f & \rightarrow & D_{taille} & \rightarrow & [0,1] \\ f & \rightarrow & t=m_{taille}(f) & \rightarrow & \mu_{de\ 1m70}(t) = \mu_{<5,170,170,5>,\ L_{de},\ R_{de}}(t) \end{array}$$

L'utilisation des fonctions L-R comme fonctions d'appartenance semble assez pratique pour les propriétés paramétrées. Nous considérerons donc que les propriétés paramétrées sont définies à l'aide de ces fonctions.

6. Opérateurs flous sur une propriété simple ou paramétrée

6.1 Définition

L'objectif est d'étudier les effets d'une autre catégorie de modificateurs : les opérateurs flous. Il s'appliquent sur une propriété simple ou paramétrée. On veut pouvoir traiter des assertions comme : *"Les menhirs sont* ***plus ou moins*** *espacés"*, *"La boîte est* ***à peu près*** *centrée"* , *"Le cube est* ***environ*** *de 2m"*, *"L'immeuble est* ***relativement*** *grand"*, *"La voiture est* ***vraiment*** *très longue"*… Nous voulons être capable d'interpréter des descriptions de la forme :

"X est ***Opérateur_flou*** *Modificateur Propriété"*.

Les opérateurs flous sont nombreux et souvent synonymes, en voici quelques uns :

précisément	*exactement*	*vraiment*
approximativement	*plus ou moins*	*plutôt*
environ	*à peu près*	*de l'ordre de*
très précisément	*vaguement*	*vers les*
grossièrement	*sommairement*	*presque*
autour de	*dans les*	*rigoureusement*
fidèlement	*parfaitement*	*véritablement*
réellement	*franchement*	*quelques*
plusieurs	*aux alentours de*	*passablement*

…

Pour simplifier, nous choisirons :

- pour les propriétés paramétrées (*"2m"*) : *"**précisément**"*, *"**exactement**"*, *"**d'environ**"* et *"**vaguement**"*.
- pour les propriétés non paramétrées (*"Grand"*) : *"**vraiment**"*, *"**plus ou moins**"* et *"**relativement**"*.

Ces opérateurs ne transforment pas la propriété de la même manière que les modificateurs vus au §4. Ces derniers modifiaient la propriété en opérant une translation pour obtenir une propriété plus forte ou plus faible. Les opérateurs flous ne déplacent pas la propriété. Ils augmentent la précision ou l'imprécision par rapport à la propriété d'origine (voir la courbe 4). Ils contractent ou dilatent la fonction d'appartenance (l'intervalle support diminue ou grandit autour du noyau). L'opérateur à appliquer dépend de la propriété. On n'utilise pas les mêmes opérateurs si la propriété est simple ou si elle est paramétrée.

L'opérateur *"**précisément**"* est un opérateur particulier qui permet de supprimer le flou d'une propriété. Il ne s'applique que sur des propriétés paramétrées. Nous verrons sont traitement au §6.5.

Dans le cas où la propriété est une propriété paramétrée, le modificateur est forcément le modificateur vide (voir le §5).

Nous posons le postulat suivant : une propriété qui admet des opérateurs flous est une propriété simple ou paramétrée définie par un ensemble flou convexe dans l'univers r des nombres réels. Autrement dit, une propriété modifiable est une propriété définie à l'aide d'un intervalle flou Par conséquent, ce sont des propriétés dont les fonctions d'appartenance peuvent être des fonctions L-R.

Nous étudierons deux solutions pour traiter un opérateur flou sur une propriété simple. L'ordre des solutions n'implique pas une préférence mais est fonction du niveau de décomposition des opérateurs.

6.2. Première solution d'interprétation

Une première solution pour traiter ce genre de description est de construire une propriété pour chaque combinaison (opérateur flou, propriété). Ainsi, pour la propriété *"2m"*, nous aurons les propriétés : *"Exactement_2m"*, *"environ_2m"* et *"vaguement_2m"*.

Ce type de représentation des propriétés possède un avantage : les différentes propriétés sont, là aussi, optimisées par rapport à leur sémantique. Cependant, le concepteur de l'application doit implanter un grand nombre de propriétés (sauf s'il possède un bibliothèque de propriétés). Cela risque donc d'être lourd à implémenter. Ce problème est d'autant plus important si l'on considère qu'il faut aussi prendre en compte les opérateurs de modification pour les propriétés modifiables. Nous allons donc essayer de généraliser les opérateurs afin d'alléger le plus possible le travail du concepteur d'application.

6.3. Deuxième solution d'interprétation

L'objectif de cette solution est de déterminer des fonctions génériques, associées aux opérateurs flous. Le concepteur se contente de définir la propriété principale. Il suffit ensuite d'appliquer l'opérateur générique requis. Ainsi, pour la propriété *"2m"*, nous avons : *"**Exactement**(2m)"*, *"**Environ**(2m)"*…

La fonction générique associée à l'opérateur flou s'applique sur la fonction d'appartenance de la propriété et plus particulièrement sur la valeur qu'elle retourne pour obtenir la fonction d'appartenance de la propriété modifiée. La fonction générique modifie les degrés d'appartenances des valeurs du domaine à la propriété.

Avec une propriété $P=\{D, <\alpha_p,a_p,b_p,\beta_p>, L_p(x), R_p(x)\}$ et un opérateur flou *Flou* de coefficient k_{flou}, la fonction d'appartenance de la propriété "***Flou*** *P*" est :

$$\mu_{flou\ p} : \quad D \rightarrow [0,1]$$

$$t \rightarrow \mu_{<\frac{\alpha_p}{k_{flou}},\, a_p,\, b_p,\, \frac{\beta_p}{k_{flou}}>,\, L_p,\, R_p}(t)^{k_{flou}} \qquad \text{avec} \quad k_{flou} \quad r^{+}$$

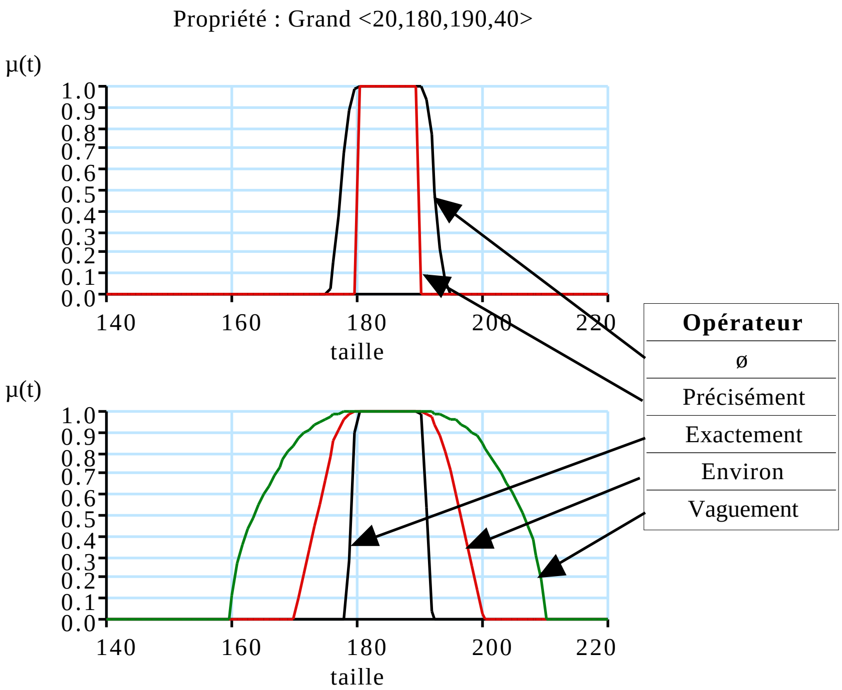
K_{flou} est un coefficient dépendant de l'opérateur flou utilisé. Bien sûr, il doit exister d'autres fonctions. Ici, nous nous sommes inspirés des opérateurs de dilatation et de contraction[8].

Ces opérateurs ne dépendent pas des caractéristiques sémantiques de la propriété sur laquelle ils portent. En particulier, l'opérateur flou ne dépend pas du signe de la propriété. Par exemple, *"**relativement**"* agit de la même manière sur *"petit"* et sur *"grand"*.

Pour les opérateurs, nous avons :

- $k_{flou} > 1$ pour ceux diminuant le flou(*"**exactement**", "**vraiment**"*…),
- $0 < k_{flou} < 1$ pour ceux augmentant le flou (*"**plus ou moins**", "**environ**"*…).

8 voir Annexe 1, §6.



Courbe 4 : Opérateurs flous sur la fonction d'appartenance pour la propriété "entre 1m80 et 1m90"

Remarque : Dans certains cas, *"très"* apparaît pour renforcer un opérateur flou (*"très* ***exactement****…"*). Cependant, nous considérons qu'il est soit utilisé par effet de style et il n'est pas nécessaire de le prendre en compte, soit il renforce la précision et nous traiterons l'opérateur flou *"**très_exactement**"* au même titre que les autres opérateurs flous.

L'effet d'un opérateur flou dépend du type de la propriété sur laquelle il porte. En effet, nous avons trois classes de propriétés : précise, imprécise et floue. Donc, vis à vis du flou, il y a deux groupes : les propriétés non floues (précises ou imprécises) et les propriétés floues. Sur ces dernières, les opérateurs que nous venons de définir sont totalement adaptés. Mais ce n'est pas le cas pour les propriétés non floues.

6.4. Opérateurs flous et propriétés non floues

Nous avons posé que les propriétés paramétrées sont légèrement floues. Cependant, sans cette hypothèse, gérer l'assertion *"A mesure **environ** 2m"* revient à rendre floue une propriété non floue. Autrement dit, ceci revient à transformer un nombre classique (resp. un intervalle classique) en nombre flou (resp. intervalle flou).

L'intervalle autour de la valeur ou de l'intervalle est fonction de l'opérateur utilisé. Par conséquent, à chaque opérateur flou, il faut associer un coefficient donnant la taille du support de la propriété (par exemple proportionnel à l'intervalle de validité de la mesure[9]) et déterminer la fonction d'appartenance à utiliser. Dans le cas de propriétés définies par un fonction L-R, il faut mettre α ou β différent de 0.

6.5. L'opération inverse : rendre non floue une propriété floue

L'objectif est de pouvoir traiter l'opérateur *"**précisément**"*. L'opération de rendre non floue une propriété floue est assez facile à mettre en place. Elle consiste à poser un seuil au dessus duquel l'élément du domaine est considéré comme appartenant totalement à la propriété.

[9] Nous pouvons imaginer, par exemple, que le support sera fonction de l'intervalle imprécis et de l'intervalle du domaine.

Il suffit d'appliquer la fonction :

N_λ :[0,1] $\rightarrow$ [0,1]

t $\rightarrow$ $N_\lambda(t) = 0$ si $t < \lambda$ sinon $N_\lambda(t) = 1$ avec λ [0,1]

Remarque : si λ=1 alors la propriété modifiée est définie sur le noyau de la propriété d'origine et si λ=0 elle est définie sur le support. La première solution semble la meilleure.

Dans le cas où la fonction d'appartenance de la propriété est de type L-R, il suffit de mettre à 0 les éléments α et β du quadruplet. Ainsi, si $P=\{D, <\alpha_p,a_p,b_p,\beta_p>, L_p(x), R_p(x)\}$ on aura comme propriété $P'=\{D, <0,a_p,b_p,0>, L_p(x), R_p(x)\}$.

7. Propriétés relatives

L'interprétation d'assertions du style *"A est loin de B"*, *"A est assez proche de 1m80"* ou *"A est très proche de B"* est un peu différente. Ces descriptions ne sont pas comme les précédentes. En effet, jusqu'ici, les descriptions portaient sur une seule scène (ou sous-scène). La scène devait posséder la propriété (modifiée ou non). Maintenant, la description porte sur deux sous-scènes de la scène courante ou une sous-scène et une constante. Elles sont "liées" par une propriété peut être modifiée.

Quand on dit *"A est très loin de B"*, l'objet *"A"* est en relation avec l'objet *"B"* par la propriété *"loin de"* modifiée par le modificateur *"très"*. Nous avons des propriétés (*"proche de"* et *"loin de"*) qui sont des relations binaires entre deux sous-scènes. Nous les appellerons des propriétés relatives. Elles ont la forme :

"X est Modificateur Propriété_Relative Y".

"Y" est soit une sous-scène de la scène courante, soit une constante. Les modificateurs sont identiques à ceux des propriétés simples et sont gérés de la même manière.

Ces propriétés sont définies sur un domaine binaire (par exemple, le domaine des distances entre deux objets). Cependant, elles sont traitées comme des propriétés simples. Pour une propriété $P=\{D, \mu_p, \tau_p\}$, nous avons alors :

$U_f x U_f$ $\rightarrow$ D $\rightarrow$ [0,1]

f_1, f_2 $\rightarrow$ $t=m_D(f_1, f_2)$ $\rightarrow$ $\mu_p(t)$

"loin de" et *"proche de"* sont donc des propriétés simples, c'est-à-dire définies sur le domaine unaire des *"distances"*. Et nous avons pour l'assertion *"A est loin de B"* :

$U_f x U_f$ $\rightarrow$ $D_{distances}$ $\rightarrow$ [0,1]

A, B $\rightarrow$ $t=m_{distance}(A, B)$ $\rightarrow$ $\mu_{loin\_de}(t)$

Elles ont les mêmes caractéristiques que les propriétés simples et sont gérées de la même manière (en particulier par rapport à l'application des modificateurs).

8. Propriétés de comparaison simple

8.1. Définition

L'objectif est d'étudier des descriptions basées sur des propriétés relatives un peu particulières : la comparaison, par rapport à une propriété simple, de deux objets (sous-scènes de la scène courante) ou d'un objet et une constante. En effet, nous n'avons pas simplement une propriété relative, nous avons une propriété relative associée à une propriété simple. Nous appellerons de telles propriétés des propriétés de comparaison. Nous voulons pouvoir interpréter par exemple : *"A est* ***beaucoup plus*** *grand* ***que*** *B"*, *"A est* ***légèrement moins*** *grand* ***que*** *B"*… Dans la dernière description, l'objet *A* est comparé à l'objet *B* grâce au comparateur *"**légèrement moins** … **que**"* en fonction de la propriété *"grand"* du domaine des *"tailles"*. Une propriété de comparaison simple a la forme suivante :

"A est ***Relation****$_{\textit{\textbf{Propriété}}}$* *B"*.

La propriété simple sur laquelle est basée la relation s'appelle la propriété de référence. Une propriété de comparaison est basée sur l'évaluation des deux objets par rapport au domaine de la propriété de référence puis la comparaison de ces évaluations en fonction de la propriété et des opérateurs de comparaison utilisés.

Les relations de comparaison sont par exemple :

plus…que	*beaucoup plus…que*	*moins…que*
beaucoup moins…que	*plutôt plus…que*	*plutôt moins…que*
aussi…que	*excessivement plus…que*	*excessivement moins…que*
un peu plus…que	*un peu moins…que*	*légèrement plus …que*
de même…que	*légèrement moins…que*	*plutôt un peu plus…que*
plutôt un peu moins…que	…	

Pour simplifier le traitement, nous choisissons de ne traiter que : *"**excessivement plus…que**"*, *"**beaucoup plus…que**"*, *"**plus…que**"*, *"**un peu plus…que**"*, *"**aussi…que**"*, *"**un peu moins…que**"*, *"**moins…que**"*, *"**beaucoup moins…que**"* et *"**excessivement moins…que**"*. Il n'y a pas de relation par défaut. En effet, *"A est grand que B"* ne se dit pas.

Nous posons le postulat suivant : La propriété de référence est une propriété simple qui est soit positive soit négative. Le traitement des propriétés neutres n'est pas facile. Nous pouvons remarquer que l'affirmation : *"A est* ***plus*** *moyen* ***que*** *B"* n'a pas le même sens que *"A est* ***plus*** *grand* ***que*** *B"*. Nous allons convenir que ce genre d'assertion n'est pas pris en compte car elle possède surtout un sens péjoratif.

On remarque que l'on ne peut pas dire : *"A est* ***plus*** *2m* ***que*** *B"*. Dans le cas d'une comparaison avec une propriété de référence paramétrée, la description sera interdite grâce à un filtre au moment de la saisie. Nous interdirons : *"A est Comparateur Propriété_Paramétrée que B"*.

Dans un premier temps, nous n'allons étudier que les comparaisons homogènes, c'est-à-dire celles où les deux objets sont comparés par rapport à la même propriété. Le cas de la comparaison hétérogène (un ou deux objets sont comparés selon deux propriétés différentes) sera abordé au §8.6.

L'interprétation d'une propriété de comparaison associée à une propriété $P=\{D_p, \mu_p, \tau_p\}$ consiste à appliquer :

$$U_f, U_f \rightarrow D_P \times D_P \rightarrow [0,1]$$

$$f_A, f_B \rightarrow t_A=m_{Dp}(f_A), t_B=m_{Dp}(f_B) \rightarrow Comp_{\tau p}(t_A,t_B)$$

Nous allons étudier deux solutions pour traiter une propriété de comparaison absolue. L'ordre dépend, comme pour les paragraphes précédents, du niveau de décomposition de la description.

8.2. Première solution

Une première idée pour traiter ce genre de description est de construire un ensemble de propriétés de comparaisons (qui sont alors des propriétés relatives définies sur le domaine des différences de mesure) basées sur la propriété de référence. Pour la propriété de référence *"grand"*, nous avons alors : *"plus_grand_que "*, *"beaucoup_plus_grand_que "*, *"aussi_grand_que "*…

Comme pour les situations précédentes, cette solution n'est pas vraiment pratique. Ici aussi, nous allons essayer de généraliser en mettant en place des opérateurs de comparaison.

8.3. Deuxième solution

Nous allons concevoir des opérateurs génériques qui s'appliquent à la propriété de comparaison. Nous allons donc gérer les descriptions du type : *"A est [**beaucoup_plus**, **un_peu_plus**, …, **aussi**, **beaucoup_moins**, **un_peu_moins**, …] P **que** B "*. *"**plus**…**que**"*, *"**beaucoup_plus**…**que**"*, *"**moins**…**que**"*, *"**un_peu_moins**…**que**"*, *"**aussi**…**que**"*… seront appelés des relations de comparaison ou comparateurs. Ils seront associés à une propriété pour constituer une propriété de comparaison.

Nous pouvons constater qu'une comparaison, au même titre que les propriétés simples et les modificateurs, possède une "direction". Cette direction est donnée par la relation de comparaison. En effet, *"**plus**…**que**"* a une signification opposée à *"**moins**…**que**"*. Nous allons donc avoir, associé à chaque relation de comparaison, un coefficient indiquant la direction et la "force" de la relation (*"**plus**…**que**"* représente une différence moins importante que *"**beaucoup_plus**…**que**")*.

La fonction d'appartenance doit prendre en compte le fait qu'une comparaison est vérifiée en fonction de la direction de la propriété de référence, de la direction de l'opérateur de comparaison et du signe de la différence des mesures. En prenant "+" pour la direction positive, "-" pour la direction négative et le signe de la comparaison étant "mesure$_p$(A)-mesure$_p$(B)", nous aurons les situations suivantes :

Direction de la propriété	Direction de la relation de comparaison	Signe de la comparaison	Degré d'appartenance à la comparaison
+	+	+	≥0
+	+	-	=0
+	-	+	=0
+	-	-	≥0
-	+	+	=0
-	+	-	≥0
-	-	+	≥0
-	-	-	=0

Une comparaison est basée sur la différence des mesures. Par conséquent, la fonction d'appartenance est sur ce principe. C'est une fonction qui représente un intervalle flou autour de la différence "idéale" pour le comparateur.

La comparaison se traduit par une propriété binaire homogène et donc est représenté par une relation floue binaire.

Si la propriété de référence est P={D, μ_p, τ_p}, la fonction d'appartenance associée à la propriété de comparaison est :

$$\begin{array}{llll} Comp_{\tau_p} : & D_p \times D_p & \rightarrow & [0,1] \\ & t_A, t_B & \rightarrow & 0 \quad \text{si } Signe(\tau_p)*Signe(\alpha_o)*Signe(t_A-t_B)<0 \text{ et } \alpha_o \neq 0 \\ & & & \mu_{<k_D, |\alpha_o|*k_D, |\alpha_o|*k_D, k_D>, L, R}(|t_A-t_B|) \quad \text{sinon} \end{array}$$

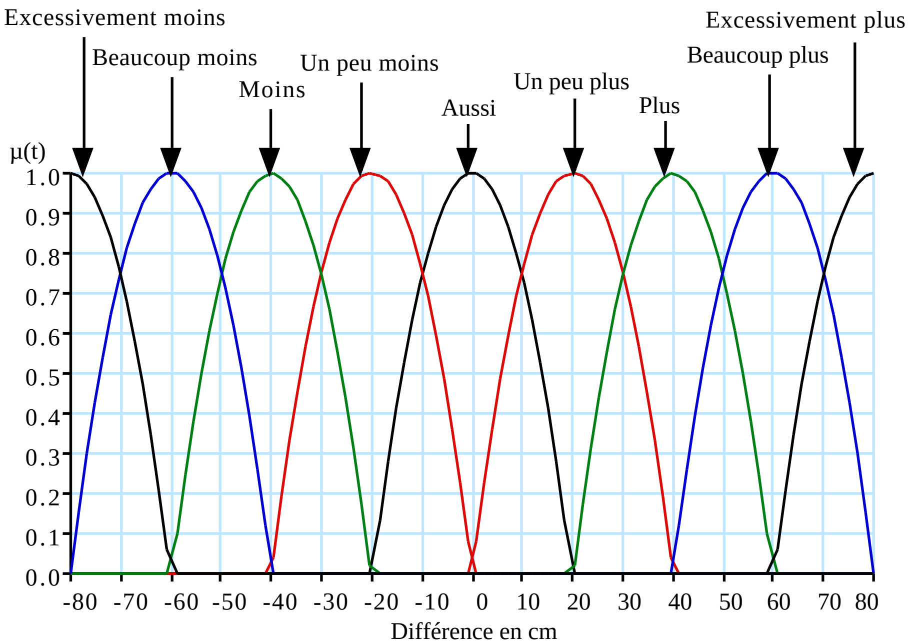
Avec k_D r et α_o r

Remarque : La fonction "Signe" est définie par :

$$\begin{array}{llll} Signe : & r & \rightarrow & \{-1, 1\} \\ & x & \rightarrow & 1 \quad \text{si } x \geq 0 \\ & & & -1 \quad \text{si } x < 0 \end{array}$$

α_o est le au coefficient associé à l'opérateur de comparaison. Nous posons :

- $\alpha_o>0$ pour les relations de comparaison positifs (*"**plus**...**que**"*...),
- $\alpha_o<0$ pour les relations de comparaison négatifs (*"**moins**...**que**"*...),
- $\alpha_o=0$ pour la relation de comparaison d'égalité appelée aussi relation d'égalité (*"**aussi**...**que**"*).



Courbe 5 : Opérateurs de comparaison pour la propriété "Grand" avec k_{taille}=20

k_D est un coefficient dépendant du domaine de la propriété de référence. Il est proportionnel à l'intervalle du domaine. Il représente la translation élémentaire rendant compte de la différence de "force" entre deux opérateurs. En effet, la comparaison dépend du domaine sur lequel elle porte. Quand on dit *"La boîte A est **plus** grande **que** la boîte B"* la différence de mesure n'est pas du même ordre de grandeur que lorsqu'on dit *"L'immeuble A est **plus** grand **que** l'immeuble B"* ou *"La planète Mars est **plus** éloignée **que** la planète Pluton"*. Dans la fonction d'appartenance de la comparaison, $|\alpha_o|*k_D$ représente la différence idéale associée au comparateur en fonction du domaine.

La propriété d'égalité (*“**aussi**…**que**”*) est indépendante du signe de la propriété de référence. De plus, elle peut être modifiée par un opérateur flou. En effet, on peut dire : *“A est à peu près **aussi** grand **que** B”*. L'application de l'opérateur flou se fait sur la fonction d'appartenance de la même manière que pour une propriété simple. Par contre, les autres relations (*“**plus**…**que**”, “**beaucoup moins**…**que**”*…) n'admettent pas d'opérateurs flous.

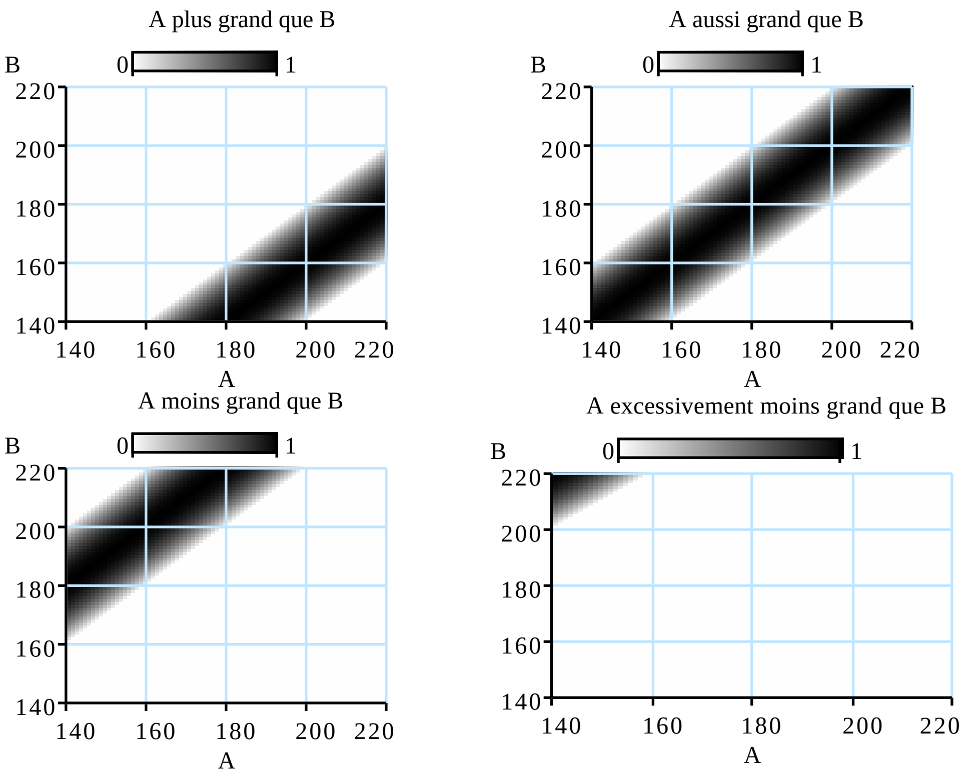
Nous pouvons constater que l'application d'un comparateur associé à une propriété de référence sur deux objets donne une fonction d'appartenance d'une propriété. Par conséquent, avec un raisonnement similaire à celui utilisé pour les modificateurs. Nous avons donc la possibilité d'appliquer :

*“X est **Comparateur**$_\beta$ (**Comparateur**$_\alpha$ Propriété) que Y”.*

En recommençant ce raisonnement autant de fois que l'on veut, il est possible d'appliquer plusieurs comparaisons.

En pratique, les possibilités d'application successives de comparaisons sont assez restreintes. Nous pouvons, en fait, mettre en évidence la règle suivante : *“**beaucoup**”* est le seul opérateur pouvant être répété plusieurs fois dans une même expression. Il s'applique sur une propriété dont le dernier comparateur est *“**beaucoup plus**…**que**”* ou *“**beaucoup moins**…**que**”* et ne peut être présent tout seul. Les autres comparateurs ne peuvent pas être répétés et se trouvent forcément appliqué en premier.

Ainsi, on peut construire des descriptions comme : *“La maison de droite est **beaucoup beaucoup plus** grand **que** celle de gauche”*…



Courbe 6 : Comparaisons entre deux objets A et B

8.4. Différence par rapport à une valeur

Dans certains cas, une description peut avoir la forme : *“A est **Opérateur_de_Comparaison** Propriété **que** Valeur”*. C’est le cas dans une description comme : *“A est **plus** grand **que** 2m”*.

Dans ce cas, la propriété de comparaison sera un peu différente. Au lieu d’avoir une fonction d’appartenance $Comp_{\tau p}(t_1,t_2)$, cette propriété aura $Comp_{\tau p}(t_1,Valeur)$

Remarque : l’égalité par rapport à une valeur revient à gérer une propriété classique. Exemple : *“A est **aussi** grand **que** 2m”* est équivalent à *“A est de 2m”*. On peut donc appliquer soit une comparaison soit une propriété paramétrée.

On remarque que l’on ne peut pas dire : *“A est **plus** moyen **que** 2m”*. Dans le cas d’une comparaison par rapport à une valeur avec une propriété de référence neutre, la description sera interdite par un filtre générique à la saisie. Nous interdirons : *“A est Comparateur Propriété_Neutre que Valeur_Constante”*.

8.5. Proportion entre deux objets

L’objectif est de traiter des descriptions comme : *“A est **4 fois plus** grand **que** B”*. En réalité, il n’y a pas de problème à gérer ceci. Une telle propriété se gère comme une égalité (situation de comparaison avec *“**aussi**”*). Nous aurons une propriété relative binaire telle que :

$$Proportions_{\tau p} : \quad D_p \times D_p \times r \rightarrow [0,1]$$

$$t_A, t_B, nb \rightarrow \begin{cases} \mu_{<k_D,\,0,\,0,\,k_D>,\,L,\,R}(|t_A - nb * t_B|) & \text{si } Signe(\tau_p) > 0 \\ \mu_{<k_D,\,0,\,0,\,k_D>,\,L,\,R}(|nb * t_A - t_B|) & \text{sinon} \end{cases}$$

8.6. Cas des propriétés de comparaison hétérogène

L’objectif est de traduire une description comme *“A est plus haut que large”*. Ce n’est pas très courant et n’a un sens que si les mesures des deux domaines sont comparables au niveau sémantique. Nous avons dans ce cas deux propriétés de référence. Nous supposerons qu’elles sont simples.

Toutes les combinaisons de propriétés ne sont pas correctes. En effet, on peut dire *“A est plus haut que large”* mais on ne dit pas *“A est plus petit que large”*. Nous allons donc poser le postulat suivant : une comparaison hétérogène n’a de sens que lorsque les deux propriétés sont de même direction. Par conséquent, une propriété hétérogène aura une fonction d’appartenance identique à une propriété de comparaison homogène. Le signe de la propriété de référence étant celui des propriétés.

L’interprétation d’une propriété de comparaison hétérogène associée à une propriété $P_1=\{D_{p1}, \mu_1, \tau_{p1}\}$ et $P_2=\{D_{p2}, \mu_2, \tau_{p2}\}$ consiste à appliquer :

$$U_f \rightarrow D_{p1} \times D_{p2} \rightarrow [0,1]$$

$$f \rightarrow t_1=m_{D1}(f),\ t_2=m_{D2}(f) \rightarrow Comp_{\tau p1}(t_1, t_2)$$

9. Propriétés de comparaison relative

Nous allons étudier une situation de description légèrement différente de la situation précédente : la comparaison de deux sous-scènes par rapport à une propriété relative. Nous appellerons de telles propriétés des propriétés de comparaison relative. Nous voulons interpréter par exemple : *"A est beaucoup plus loin de B que C"*, *"A est un peu moins loin de B que de C"*, *"A est plus proche de 2m que B"*… Une propriété de comparaison relative peut prendre deux formes possibles :

"A est $\boldsymbol{Relation}_{\boldsymbol{Propriété}}$ *B que C"* (forme 1),

"A est $\boldsymbol{Relation}_{\boldsymbol{Propriété}}$ *B que de C"* (forme 2).

Dans le premier cas la comparaison se fait entre la propriété de *A* par rapport à *B* et *C* par rapport à *B* tandis que dans le second la comparaison se fait entre la propriété de *A* par rapport à *B* et *A* par rapport à *C*.

Les relations de comparaison sont les mêmes que pour les propriétés de comparaison simple. La propriété relative $P=\{D, \mu_p, \tau_p\}$ sur laquelle est basée la comparaison s'appelle aussi la propriété de référence.

Toutes les hypothèses et postulats posés pour les propriétés de comparaison simple sont valables ici. Il est est de même pour les différents traitements possibles des opérateurs de comparaison : la première solution consiste à mettre en place des propriétés simples sur des domaines ternaires (relation ternaires) et l'autre solution consistent à mettre au point des opérateurs suffisamment génériques.

Seule l'interprétation de ce type de comparaison est légèrement différente. En effet, d'une part la propriété de référence est relative, c'est-à-dire que le domaine est binaire, et d'autre part, elle peut prendre deux formes légèrement différentes du point de vue sémantique.

L'interprétation d'une propriété de comparaison associée à une propriété relative $P=\{D_p, \mu_p, \tau_p\}$ consiste à appliquer :

- Pour la forme 1

$$U_f, U_f, U_f \rightarrow D_P \times D_P \rightarrow [0,1]$$
$$f_A, f_B, f_C \rightarrow t_1=m_{Dp}(f_A,f_B),\ t_2=m_{Dp}(f_C,f_B) \rightarrow Comp_{\tau p}(t_1,t_2)$$

- Pour la forme 2

$$U_f, U_f, U_f \rightarrow D_P \times D_P \rightarrow [0,1]$$
$$f_A, f_B, f_C \rightarrow t_1=m_{Dp}(f_A,f_B),\ t_2=m_{Dp}(f_A,f_C) \rightarrow Comp_{\tau p}(t_1,t_2)$$

10. Cas des propriétés sur des domaines n-aires

En fait, deux techniques sont utilisables pour traiter une propriété sur un domaine n-aire :

a) transformer cette propriété en une conjonction de propriétés simples, relatives ou de comparaison,

b) la gérer comme une relation floue : $D^n \rightarrow [0,1]$.

La première solution semble la meilleure. En effet, la complexité de gestion de propriétés définie dans un domaine n-aire risque d'être importantes. Par contre, Nous verrons au §12 que la conjonction et la disjonction de propriétés ne sont pas compliquées à mettre en place.

Voici quelques exemples de propriétés n-aires :

- *"Les menhirs sont entre 1m40 et 1m60"* (une propriété simple ou paramétrée sur plusieurs objets) ;
- *"La troisième boîte est plus grande que toutes les autres"* (un objet comparé à plusieurs) ;
- *"Les pierres sont alignées"* (un ensemble d'objets répond à une propriété simple ou paramétrée) ;
- *"Le nombre de voxels est de 3, 6, 8 ou 10"* (un objets peut prendre plusieurs valeurs d'une propriété) ;
- …

Voici les traitements possible pour chacun des exemples :

- On transforme la description en une conjonction de propriétés de la forme *"le menhir i est entre 1m40 et 1m60"* ;
- On transforme la description en une conjonction de propriétés de la forme *"La troisième boîte est plus grande que la boîte i (i≠3)"* ;
- C'est une propriété simple sur la scène ;
- Soit on fait une disjonction de propriétés *"Le nombre de voxels est de i"* Soit on construit une propriété simple définie sur le domaine des entiers et dont la fonction d'appartenance est à 1 pour 3, 6, 8 et 10 et à 0 pour les autres valeurs ;
- …

11. Négation d'une propriété

Dans certaines descriptions, plutôt que de donner une série de propriétés d'un même domaine, il est plus facile de donner la négation. Par exemple, on peut dire : *"L'immeuble n'est pas grand"*, *"Le cube n'est pas très loin du cône"*, *"La maison jaune n'est pas beaucoup plus grande que la maison rouge"*… Nous aurons donc des descriptions de la forme :

*"X **n'**est **pas** …"*.

Nous traitons *"X n'est pas …"* comme *"X est non …"* en ce qui concerne l'interprétation de la description. Lorsqu'une propriété est modifiable, on lui associe un nombre τ_p. La négation de cette propriété entraîne une inversion de sa direction (par exemple : *"non grand"* est de même direction que *"petit"*). Donc, la négation d'une propriété simple $P=\{D_p, \mu_p,\tau_p\}$ sera $P'=\neg P=\{D_p, 1\text{-}\mu_p,\text{-}\tau_p\}$. La modification de la fonction d'appartenance est aussi valable pour les propriétés de comparaison.

La négation d'un intervalle flou ne donne pas un intervalle flou dans le cas général. Or un opérateur de modification ne s'applique que sur des intervalles flous. Nous posons le postulat suivant : l'opérateur de négation s'applique toujours après les opérateurs de modification. En pratique, il semble se vérifier.

12. Interprétation d'une description

Une description peut être considérée comme une disjonction de conjonctions de propriétés (modifiées ou non). Globalement, une description a la forme :

"(P11 et P12 et P13...) ou (P21 et P22 et P23...) ou (P31 et P32 et P33...) ...".

Nous allons donc étudier comment interpréter une conjonction, une disjonction et une description.

12.1. Bilan sur l'évaluation d'une propriété

Nous allons considérer une propriété $P=\{D, \mu_p, \tau_p\}$. Nous avons vu les quatre cas particulier (ce sont les cas les plus courants) qui suivent :

- D et P sont unaires (propriété absolue)

$$\begin{array}{lclcl} U_f & \rightarrow & D & \rightarrow & [0,1] \\ f & \rightarrow & t=m_D(f) & \rightarrow & \mu_p(t) \end{array}$$

- D est binaire et P est unaire (propriété relative)

$$\begin{array}{lclcl} U_f \, x U_f & \rightarrow & D & \rightarrow & [0,1] \\ f_1,\ f_2 & \rightarrow & t=m_D(f_1,\ f_2) & \rightarrow & \mu_p(t) \end{array}$$

- P est binaire et D unaire (propriété de comparaison simple)

$$\begin{array}{lclcl} U_f\ ,\ U_f & \rightarrow & D \quad x \quad D & \rightarrow & [0,1] \\ f_1,\ f_2 & \rightarrow & t_1=m_D(f_1),\ t_2=m_D(\ f_2) & \rightarrow & \mu_{\tau p}(t_1,t_2) \end{array}$$

- P est binaire et D binaire (propriété de comparaison relative)

$$\begin{array}{lclcl} U_f\ ,\ U_f,\ U_f & \rightarrow & D \quad x \quad D & \rightarrow & [0,1] \\ f_A,\ f_B,\ f_C & \rightarrow & t_1=m_D(f_A,f_B),\ t_2=m_D(f_C,f_B) & \rightarrow & \mu_{\tau p}(t_1,t_2) \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{lclcl} U_f\ ,\ U_f,\ U_f & \rightarrow & D \quad x \quad D & \rightarrow & [0,1] \\ f_A,\ f_B,\ f_C & \rightarrow & t_1=m_D(f_A,f_B),\ t_2=m_D(f_A,f_C) & \rightarrow & \mu_{\tau p}(t_1,t_2) \end{array}$$

12.2. Conjonction de propriétés

Une scène doit comporter plusieurs propriétés qui sont demandées simultanément. Nous avons alors une conjonction de propriétés. Par exemple : "*La maison est grande, assez éloignée et plus allongée que la première*". Ce sont des descriptions de la forme :

"P1 et P2 et P3 ...".

Pour interpréter de telles descriptions, nous utilisons l'extension du produit cartésien à *n* propriétés (intersection de *n* ensembles flous)[10]. Nous avons alors :

$$\begin{array}{lcl} D_1 \text{ x } D_2 \text{ x } \ldots \text{ x } D_n & \rightarrow & [0,1] \\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n & \rightarrow & \mu(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)=T_{i \text{ dans } [1,n]}(\mu_{Pi}(t_i)) \end{array}$$

Avec T une t-norme adaptée[11]. Nous utiliserons, par exemple, l'opérateur "min(x)".

Dans certains cas, il est possible de dire si une description ne donnera pas de solution. Pour cela, il faut étudier sa cohérence. Les techniques de vérification de cohérence sont assez complexes. Cependant, il est un cas facile à détecter : quand deux propriétés définies sur un même domaine sont demandées simultanément, il suffit de regarder leurs supports. En effet, si l'intersection des supports

10 voir Annexe 1, §4.

11 voir Annexe 1, §3.4.

est vide, il y a incohérence. D'autres techniques de vérification de cohérences sont applicables comme celle, présentée dans [Don93], basée sur la logique de Allen appliquée aux intervalles.

Remarque : Il serait intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser une moyenne (pondérée ou non)[12] à la place de la t-norme.

12.3. Disjonction de propriétés

Dans certaines descriptions, l'utilisateur peut laisser le choix entre plusieurs descriptions. Nous aurons alors une disjonction de propriétés. Par exemple : "*La maison est haute ou allongée*". Ce sont des descriptions de la forme :

"P1 ou P2 ou P3 ...".

Pour interpréter de telles descriptions, nous utilisons l'extension du produit cartésien à n propriétés (union de n ensembles flous).

Nous aurons alors :

$$D_1 \text{ x } D_2 \text{ x ... x } D_n \rightarrow [0,1]$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \rightarrow \mu(t_1, t_2, \ldots, t_n) = {}_{i \text{ dans } [1,n]}(\mu_{Pi}(t_i))$$

Avec une t-conorme adaptée[13]. Nous utiliserons, par exemple, l'opérateur "max(x)".

12.4. Description

L'interprétation d'une description sur une forme donnée consiste donc à appliquer :

$$D_{11} \text{ x } D_{12} \text{ x ... x } D_{1n} \text{ x } D_{21} \text{ x } D_{22} \text{ x ... x } D_{2n} \text{ x } \ldots \rightarrow [0,1]$$

$$t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1n}, t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2n}, \ldots \rightarrow \mu(t,\ldots) = {}_{i \text{ dans } [1,m]}(T_{j \text{ dans } [1,n]}(\mu_{Pij}(t_{ij})))$$

Globalement, évaluer une description sur une forme revient à appliquer la fonction v :

$$v : Uf \rightarrow [0,1]$$

$$f \rightarrow v(f)$$

13. Validité d'une forme par rapport à une description

Une forme F est dite forme solution si toutes les propriétés d'une des conjonctions de la description sont considérées comme vérifiées. Pour simplifier, nous considérerons dans ce paragraphe, une description comme une conjonction de propriétés.

Lors d'une étude de forme, il est indispensable de déterminer si une propriété donnée est ou non vérifiée. Pour cela, nous définissons le Seuil d'Acceptation (S.d.A.). Un S.d.A. est une valeur de degré d'appartenance à partir de laquelle la propriété est considérée comme vérifiée.

12 voir Annexe 1, §3.5.
13 voir Annexe 1, §3.4.

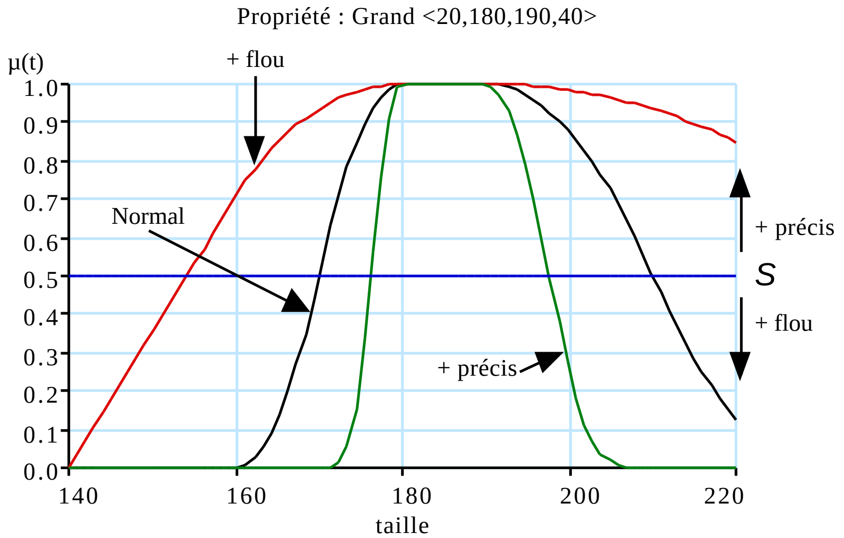
Le S.d.A. est défini par une fonction α et une valeur S telle que :

$$\alpha_S : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\tau \rightarrow \begin{cases} \tau & \text{si } \tau \geq S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le S.d.A. peut être :

- calculé automatiquement,
- déterminé par le concepteur,
- déterminé par l'utilisateur.



Courbe 7 : Etude de l'influence du seuil d'acceptation d'une propriété

Plusieurs politiques sont applicables quant à la détermination de ce S.d.A. suivant l'exigence portée sur la notion d'appartenance. En voici quelques unes :

- On considère qu'une propriété est présente dès que le degré d'appartenance n'est pas nul. Le S.d.A. est donc le plus bas possible. Par exemple, en admettant que le degré d'appartenance est défini avec 1 chiffre significatif, nous aurons : S = 0,1.
- On considère que dès que le degré d'appartenance est non-négligeable, la propriété est vérifiée. Par exemple, si on considère que le degré d'appartenance est négligeable au-dessous de 0,15 nous aurons : S = 0,15.
- La propriété est vérifiée dès que le degré d'appartenance est supérieur à 50% (choix d'un S.d.A. “raisonnable”). Nous aurons alors : S = 0,5.
- On considère qu'une propriété n'est vérifiée que lorsque le degré d'appartenance est proche de 1. Nous aurons par exemple : S = 0,9.
- Le S.d.A. est déterminé en fonction des opérateurs flous de la propriété et de la description. On peut aussi prendre en compte l'ensemble des propriétés (en calculant un degré de flou moyen par exemple).

Remarques :

- Le choix d'une politique peut être global (pour toutes les propriétés) ou spécifique à chaque propriété.
- Le S.d.A. de la description ne semble pas nécessaire car il peut être déduit des S.d.A. des propriétés. Il se détermine alors en fonction des conjonctions, des disjonctions, des t-normes et des t-conormes utilisés. Cependant, un S.d.A. global permet de rendre compte d'une certaine incertitude quant à la description. Par exemple, nous pouvons avoir des débuts de description comme : *"La description est exactement la suivante : …"* ou *"La description est à peu près la suivante : …"*…
- Si S=0, la propriété devient inutile.
- Si S=1, la propriété est une propriété classique (précise ou imprécise et non floue).

Si on considère qu'avec un S.d.A. S nous avons, pour une propriété P={D, μ, τ} :

- si $\mu \geq S$ alors la propriété est vérifiée,
- si $\mu < S$ alors la propriété n'est pas vérifiée.

Nous pouvons facilement faire la correspondance avec la notion de α-coupe[14] en T.S.E.F. L'ensemble des mesures de D solutions par rapport au S.d.A. est donc une α-coupe telle que $\alpha = S$. Donc, pour une propriété donnée P d'un domaine D, une forme est solution si la mesure t selon D est telle que : t P_S (P_S est la coupe de niveau S ou S-coupe de la propriété P).

14. Autre utilisation de cette méthode

Nous avons vu que la méthode fonctionne pour la vérification a posteriori d'une forme par rapport à une description (voir les paragraphes précédents). La forme est d'abord générée puis vérifiée. Elle semble aussi fonctionner pour des techniques où la propriété permet de générer la forme. En particulier, elle semble utilisable pour des techniques de tirages aléatoires sous contraintes comme celles décrites dans [Don93] et [Chau94]. Ces dernières utilisent des traitements sur des intervalles. La T.S.E.F. nous indique que les opérations sur les intervalles classiques sont également valables sur les intervalles flous. Notre méthode est, en quelques sortes, une généralisation des intervalles classiques. Or ces méthodes de génération sont basées sur la manipulation d'intervalles.

Dans ces systèmes, une scène peut être modifiée à l'aide d'un ordre de modification. Par exemple, nous pouvons avoir : *"A est plus grand"*, *"A est beaucoup plus petit"*… De telles assertions sont en fait équivalentes à : *"$A_{nouveau}$ est plus grand que A_{ancien}"*, *"$A_{nouveau}$ est beaucoup plus petit que A_{ancien}"*…

Vérifier une propriété de modification revient à vérifier une propriété relative sur un objet de deux scènes.

Ce type d'assertion n'est pas souvent traité de cette manière. Il est utilisé pour la construction de la forme (tirage aléatoire sous contraintes) et non pour la vérification. Les propriétés telles que nous les avons définies peuvent être utilisées lors de la construction d'une forme.

En particulier, pour les propriétés définies sur des intervalles flous (propriétés associées à un paramètres définis sur un intervalle borné) et associées à un paramètre de la scène, nous pouvons utiliser une technique de tirage aléatoire. La fonction d'appartenance est alors considérée comme une fonction de probabilité.

14 voir Annexe 1, Définition 10.

Il suffit pour cela d'utiliser la méthode classique (utilisée par [Mou94]) :

- On détermine la cardinalité C de la propriété (au sens de la T.S.E.F.).
- On fait un tirage aléatoire T (selon une loi normale) entre 0 et C.
- On détermine le t en utilisant une intégration de la fonction suivant la méthode de Simpson. On intègre par partie jusqu'à atteindre T.

15. Conclusion

Nous avons vu qu'il est possible de formaliser certaines propriétés à l'aide de la théorie des sous-ensembles flous. Nous avons vu comment les définir, les utiliser et les modifier.

Cette formalisation semble bien adaptée pour définir les propriétés. Cependant, il reste encore du travail à faire. Il faut d'abord étudier plus précisément la généralisation des propriétés à des propriétés n-aires sur des domaines n-aires ainsi que le traitement des propriétés de comparaison hétérogènes. Il faut préciser l'étude des propriétés neutres, de la négation et des propriétés de modification. Enfin, il faut étudier les possibilités d'optimisation en déterminant les situations privilégiées pour mettre en places élagages et R.d.C.

Il convient d'étudier précisément l'utilisation de ce formalisme dans les générateurs classiques en modélisation déclarative. Nous avons vu que cette méthode fonctionne bien en vérification a posteriori. Cependant, il est nécessaire d'étudier en détail sont la possibilité de l'intégrer dans des travaux où la propriété dirige la génération. C'est le cas, en particulier, dans les techniques de tirage aléatoire sous contraintes de [Chau94]. Il faut noter que l'intérêt de cette technique ne réside sans-doutes pas essentiellement dans la génération des solutions mais plutôt dans une souplesse accrue dans la description et dans des possibilités nouvelles de déductions et d'apprentissage (en particulier au niveau de la prise de connaissance des solutions).

Il reste donc encore à intégrer ce formalisme dans un modeleur déclaratif et d'étudier les nouvelles possibilités qu'il ouvre comme, en particulier :

- l'utilisation dans une plate-forme de programmation pour faciliter la définition de propriétés,
- l'étude de l'application de la logique floue pour mettre au point un moteur d'inférence permettant de déduire des propriétés plus efficacement,
- l'étude de techniques d'apprentissage afin d'améliorer la souplesse des applications, la génération et la prise de connaissance des solutions (en utilisant par exemple des techniques de classement),
- …

Bibliographie

ADLP90V. Andres, D. Dubois, J. Lang, H. Prade,
Logique possibiliste et logique floue :
Application au raisonnement automatisé et aux systèmes d'informations,
Modèles logiques et systèmes d'intelligence artificielle, Hermès, Paris, 1990, pp 163-181

Bou89 B. Bouchon-Meunier,
Sous-ensembles flous et théorie des possibilités, origine et développement,
Bulletin de l'AFCET, n°80, Paris, Juin 1989, pp 6 - 9

Bou93 B. Bouchon-Meunier,
La Logique Floue,
Presses Universitaires de france, Paris, 1993, 128 pages

Buh94 H. Bühler,
Réglage par logique floue,
Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1994, 181 pages

Chau94 D. Chauvat,
Le projet VoluFormes : un exemple de modélisation déclarative avec contrôle spatial,
Thèse de doctorat, Nantes, Décembre 94, 225 pages

Col90 C. Colin,
Modélisation déclarative de scènes à base de polyèdres élémentaires,
Thèse de doctorat, Rennes, Décembre 1990, 266 pages

Col92 C. Colin,
Les propriétés dans le cadre d'une modélisation géométrique déclarative,
MICAD 92, Paris, 1992, pp 75-94

Des95 E. Desmontils,
Les modeleurs déclaratifs,
Rapport de recherche IRIN-95, Nantes, Septembre 1995, 127 pages

Don93 S. Donikian,
Une approche déclarative pour la création de scènes tridimensionnelles :
application à la conception architecturale,
Thèse de Doctorat, Rennes, 1993, 149 pages

DPr85 D. Dubois, H. Prade,
Théorie des possibilités : Application à la représentation des connaissances en informatique,
MASSON, Paris, 1985, 248 pages

DPr88 D. Dubois, H. Prade,
Weighted Fuzzy Pattern Matching,
Fuzzy Sets and Systems, vol. 28, n° 3, Décembre 1988, pp 313-331

DPr89 D. Dubois, H. Prade,
Sous-ensembles flous et mesure de possibilité : aspects théoriques et pratiques,
Bulletin de l'AFCET, n° 80, Paris, Juin 1989, pp 6 - 9

DPr93 D. Dubois, H. Prade,
Ensembles flous, raisonnement et décision,
Rapport IRIT/93-52-R, Toulouse, Décembre 1993, 75 pages

HBC91 J.-P. Haton, N. Bouzid, F. Charpillet, M.-C. Haton, B. Lâasri, H. Lâasri, P. Marquis, T. Mondot, A. Napoli,
Le raisonnement en intelligence artificielle.
Modèles, techniques et architectures pour les systèmes à base de connaissance,
InterEditions, Paris, 1991, 475 pages

LMM89 M. Lucas, D. Martin, P. Martin et D. Plemenos,
Le projet ExploFormes : Quelques pas vers la modélisation déclarative de formes,
Journées AFCET-GROPLAN, Strasbourg, 1989, publié dans BIGRE, n° 67,
janvier 1990, pp 35-49

Mar90 J.-Y. Martin ,
Synthèse d'images à l'aide d'automates cellulaires,
Thèse de doctorat, Rennes, Décembre 1990, 228 pages

Mat93 L. Mastyska,
Logic Programming with Fuzzy Sets,
Technical Report, City University, London, December 1993, 20 pages

Mou94 J.-P. Mounier,
Modélisation déclarative de quelques paramètres de production d'images réalistes,
Rapport de DEA, Nantes, 1994, 150 pages

Oft94 Observatoire français des techniques avancées,
Logique floue,
Masson, Paris, 1994, 295 pages

Paj94 L. Pajot-Duval,
Modélisation déclarative de configurations de segments de droite,
Thèse de doctorat, Nantes, Juin 1994, 142 pages

Pou94 F. Poulet,
Modélisation déclarative de scènes tridimensionnelles par énumération spatiale :
le projet SpatioFormes,
Thèse de doctorat, Rennes, Juin 1994, 135 pages

Ton95 J.-R. Tong-Tong,
La logique floue,
Hermès, Paris, 1995, 160 pages

Zad65 L. A. Zadeh,
Fuzzy Sets,
Information and control, 8, 1965, pp 338-353

Annexe 1 : Les sous-ensembles flous

1. Introduction

L'objectif de cette annexe est de présenter rapidement les principales notions et résultats en théorie des sous-ensembles flous. Les principaux documents qui ont servi à construire cette annexe sont : [Zad65], [Tong95], [HBC91], [Bou93], [DPr93], [Oft94], [Buh94] et [Mat93].

2. Les sous-ensembles flous

Définition 1 : Un ensemble flou A sur le domaine (appelé aussi référentiel) T est défini par la donnée d'une fonction d'appartenance μ_a à valeur dans [0,1]. $\mu_a(t)$ est le degré d'appartenance de t   T à A.

$$\mu_a : T \rightarrow [0,1]$$
$$t \rightarrow \mu_a(t)$$

Définition 2 : On appelle Support de A noté Supp(A), le sous-ensemble non flou des valeurs de T telles que : Supp(A) = {t   T : $\mu_a(t) \neq 0$}

Définition 3 : On appelle Noyau de A noté Noy(A), le sous-ensemble non flou des valeurs de T telles que : Noy(A) = {t   T : $\mu_a(t) = 1$}

Remarque : Noy(A)   Supp(A)   T

Définition 4 : La hauteur d'un ensemble flou A est le plus fort degré d'appartenance d'un élément du domaine appartenant à A. Elle est notée h(A) telle que : $h(A) = \sup_{t\ \ T}(\mu_a(t))$

Définition 5 : Un ensemble flou est dit normalisé si : h(A) = 1, autrement dit si Noy(A)≠{}

Définition 6 : La cardinalité de A notée |A| évalue le degré global avec lequel les éléments de T appartiennent à A. Soit[15] : $|A| = \int_T \mu_a(t)dt$

Remarque : On a, si T est fini : $|A| = \sum_{t\ \ T} \mu_a(t)$

Définition 7 : L'ensemble A est dit précis si :   t   T,   u   T : $\mu_a(t) = 1$ et $\mu_a(u) = 0$ si u≠t d'où : Supp(A) = Noy(A) = {t}

15 Pour la suite, dans ce genre de formule, nous supposerons être dans les bonnes conditions de convergence (support compact).

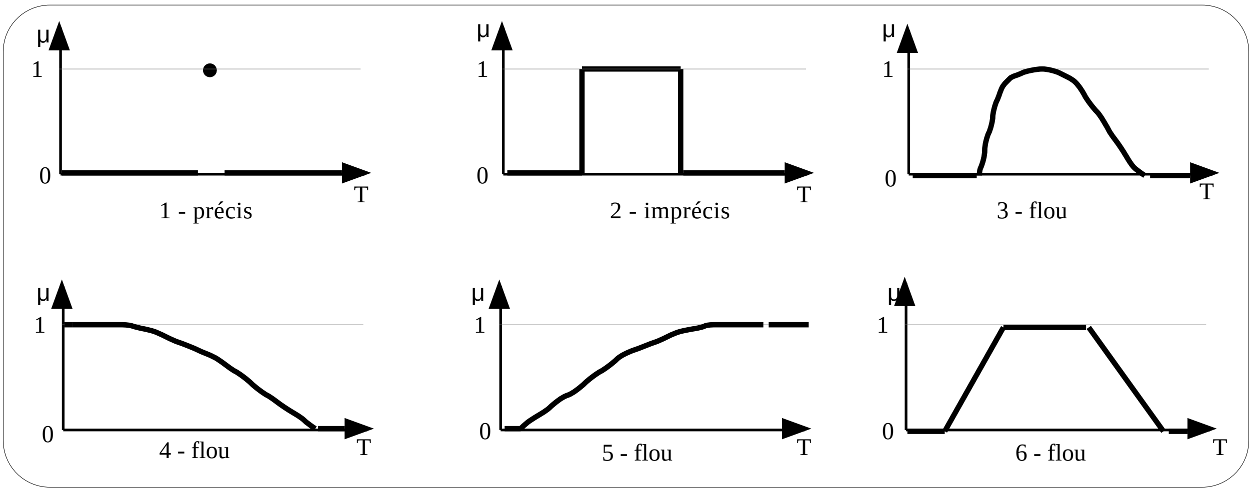
Définition 8 : L'ensemble A est dit imprécis si : $t \quad T : \mu_a(t) \quad \{0,1\}$ d'où : Supp(A) = Noy(A)

Définition 9 : L'ensemble A est dit flou si :

$t \quad T : \mu_a(t) \quad]0,1[$

d'où : Noy(A) Supp(A)

Quelques exemples de fonctions d'appartenance :



Définition 10 : On appelle coupe de niveau α ou α-coupe de l'ensemble flou A pour une valeur donnée $\alpha \quad [0,1]$, le sous-ensemble non flou A_α de T défini par : $A_\alpha = \{t \quad T : \alpha \quad [0,1],\ \mu_a(t) \geq \alpha\}$

Définition 11 : On appelle α-niveau une α-coupe telle que : $A^\alpha = \{t \quad T : \alpha \quad [0,1],\ \mu_a(t) = \alpha\}$

Définition 12 : On appelle barycentre ou centre de gravité d'un ensemble flou A de T, l'élément g de T tel que :

$$g = \frac{\int_T t\mu(t)\, dt}{\int_T \mu(t)\, dt}$$

Si T est discret, on a alors :

$$g = \frac{\sum_T t\mu(t)}{\sum_T \mu(t)}$$

3. Opérations sur les ensembles flous

3.1. Relations entre deux ensembles flous A et B de T :

Soit t T, k un entier

- l'inclusion : A B $\Leftrightarrow$ $\mu_a(t) \leq \mu_b(t)$

- l'égalité : A = B $\Leftrightarrow$ $\mu_a(t) = \mu_b(t)$

- la distance : $d(A,B) = \sum_{t \; T} (|\mu_a(t) - \mu_b(t)|)^{1/k}$ avec souvent k = 2 (distance Euclidienne)

3.2. Composition de deux ensembles flous A et B de T :

Soit Max(a,b) ≡ a b et Min(a,b) ≡ a b

Soit t T, α [0,1], C un ensemble flou de T

- l'intersection : C = A ∩ B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \min(\mu_a(t),\mu_b(t)) = \mu_a(t) \quad \mu_b(t)$ (voir les t-normes)

- l'union : C = A B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \max(\mu_a(t),\mu_b(t)) = \mu_a(t) \quad \mu_b(t)$ (voir les t-conormes)

- l'addition ou somme bornée : C = A B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \min(1,\mu_a(t)+\mu_b(t)) = 1 \quad (\mu_a(t) + \mu_b(t))$

- la somme algébrique (probabiliste) : C = A + B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \mu_a(t)+\mu_b(t) - \mu_a(t).\mu_b(t)$

- la multiplication : C = A B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \max(0,\mu_a(t)+\mu_b(t)-1) = 0 \quad (\mu_a(t) + \mu_b(t) - 1)$

- la multiplication algébrique (probabiliste) : C = A . B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \mu_a(t).\mu_b(t)$

- la multiplication par une constante : C = α . A $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \alpha.\mu_a(t)$

- la soustraction : C = A - B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = \mu_a(t) \quad (1 - \mu_b(t))$

- la soustraction restreinte ou soustraction bornée : C = A⟨-⟩ B $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = 0 \quad (\mu_a(t) - \mu_b(t))$

- la soustraction absolue : C = |A - B| $\Leftrightarrow$ $\mu_c(t) = |\mu_a(t) - \mu_b(t)|$

- la soustraction symétrique : C = A Δ B $\Leftrightarrow$ C = (A-B) (B-A)

- le complément de degré λ : $C = \overline{A}^{\lambda} \Leftrightarrow \mu_c(t) = \dfrac{1-\mu_a(t)}{1+\lambda\mu_a(t)}$

3.3. Complémentation d'un ensemble flou A de T :

Soit t T, C un ensemble flou de T : $C = \overline{A} \Leftrightarrow \mu_c(t) = 1 - \mu_a(t)$

3.4. T-Normes et T-Conormes

Définition 13 : une norme triangulaire (t-norme) est une fonction T : [0,1]x[0,1] → [0,1] qui vérifie pour tous x, y, t et z de [0,1] :
i) T(x,y)=T(y,x) (commutativité)
ii) T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z) (associativité)
iii) T(x,y) ≤ T(z,t) si x≤z et y≤t (monotonie)
iv) T(x,1) = x (élément neutre 1)

Définition 14 : de façon analogue, une conorme triangulaire (t-conorme) est une fonction : [0,1]x[0,1] → [0,1] qui vérifie pour tous x, y, t et z de [0,1] :

i) (x,y)= (y,x) (commutativité)

ii) (x, (y,z))= ((x,y),z) (associativité)

iii) (x,y) ≤ (z,t) si x≤z et y≤t (monotonie)

iv) (x,0) = x (élément neutre 0)

Remarques :
- N’importe quelle t-norme est un opérateur d’intersection.
- N’importe quelle t-conorme est un opérateur d’union.
- Leurs propriétés montrent que t-normes et t-conormes peuvent être considérées comme duales. On peut passer de l’un à l’autre par l’intermédiaire d’une négation (fonction n : [0,1] → [0,1] telle que n(0)=1, n(1)=0 et n(x)≤n(y) si x≥y. La négation n(x)=1-x est la plus classique.

Exemples de t-normes et de t-conormes :

t-norme	t-conorme	nom
min(x,y)	max(x,y)	Zadeh
x.y	x+y-x.y	Probabiliste
max(x+y-1, 0)	min(x+y, 1)	Lukasiewicz

3.5. Moyennes

La notion de moyenne est intermédiaire entre t-norme et t-conorme. Les moyennes ont la forme suivante :

$$M_f(a_1, \ldots, a_m)=f^{-1}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(a_j)\right)$$

Remarque : Les moyennes usuelles sont définies avec $f(x)=x^{\alpha}$

Il est possible aussi de définir une moyenne pondérée :

$$M^f_{w_1, \ldots, w_m}(a_1, \ldots, a_m)=f^{-1}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_j f(a_j)\right)$$

avec : $\sum_{j=1}^{m} w_j=1$

4. Relations floues

4.1. Produit cartésien de deux ensembles flous A de T et B de S :

Soit t T, Soit s S,

Soit C tq :

$$\mu_c : TxS \rightarrow [0,1]$$
$$t,s \rightarrow \mu_c(t,s)$$

$C = A \times B \Leftrightarrow \mu_c(t,s) = \mu_{a\times b}(t,s) = \min(\mu_a(t),\mu_b(s))$

4.2. Relation floue :

Soit A_i des ensembles flous de T (i [1,n]) , $(t_1, \ldots, t_n)$ T^n

Soit C tq :

$$\mu_c : T_1x\ldots xT_n \rightarrow [0,1]$$
$$t_1, \ldots, t_n \rightarrow \mu_c(t_1, \ldots, t_n)$$

$C = R(A_1, \ldots, A_n) \Leftrightarrow \mu_c(t_1, \ldots, t_n) = \mu_R(t_1, \ldots, t_n)$

4.3. Composition de relations floues binaires A et B :

Soit x, y et v T, Soit C une relation binaire tq :

$$\mu_c : TxT \rightarrow [0,1]$$
$$x,y \rightarrow \mu_c(x,y)$$

$C = A \circ B \Leftrightarrow \mu_c(x,y) = \mu_{A\circ B}(x,y) = \mathrm{Sup}_v \min(\mu_a(x,v),\mu_b(v,y))$

5. Cas particuliers d'ensembles flous

Définition 15 : La convexité d'un ensemble flou A de T est telle que A est convexe si et seulement si λ [0,1], x_1, x_2 T, $\mu_a(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\min(\mu_a(x_1),\mu_a(x_2))$

Remarque : si A et B sont deux ensembles flous convexes alors $A \cap B$ est convexe.

Définition 16 : Une quantité floue est un ensemble flou dans l'univers r des nombres réels. Une quantité floue est supposée normalisée.

Définition 17 : Une quantité floue est dite convexe si :

$[a,b]$ r x $[a,b]$: $\mu(x) \geq \min(\mu(a),\mu(b))$

Définition 18 : Un intervalle flou est une quantité floue convexe.

Remarque : lorsque la fonction d'appartenance d'un intervalle flou est semi-continue supérieurement (toute α-coupe est un intervalle fermé), cet intervalle est une généralisation de l'intervalle fermé. Nous supposerons dans la suite que les intervalles flous possèdent cette propriété.

Définition : Un Nombre flou est un intervalle flou semi-continu supérieurement dont la fonction d'appartenance est à support compact (fermé et borné) dans r. Le noyau est réduit à un élément (valeur modale).

Remarques sur les quantités floues :
- Les opération habituelles sur les nombres réels sont définies aussi sur les quantités floues (opposé, inverse, puissance, exponentielle, signe, addition, soustraction, multiplication, division...).
- Une représentation très utilisée est la représentation L-R et en particulier la représentation trapézoïdale (voir annexe 3).

6. Variables et modificateurs linguistiques

Notion de variable linguistique : A un domaine est associée une variable linguistique qui permet l'assertion suivante : "X est A" X est une variable linguistique associée au domaine T et A un ensemble flou définit sur le domaine T

Exemple : *"Jean est grand"* = *"Taille(Jean) est grand"* = *"X est grand"*. X est définie sur le domaine *"Taille"* (elle est de type *"Taille"*) et prend pour valeur *"grand"*.

Notion de modificateur linguistique : Ils permettent d'amplifier ou d'atténuer la signification initiale de certains attributs. C'est une fonction de [0,1] dans [0,1] qui s'applique sur la fonction d'appartenance d'un ensemble flou.

Opérations de modification d'un ensemble flou A de T (modificateurs linguistiques) :

Soit t T

- *"très"* ou Contraction : cont(A) = μ_a^2

- *"plus ou moins"* ou Dilatation : dil(A) = $\sqrt{\mu_a}$

- *"hautement"* : Haut(A) = $\mu_a{}^3$

- *"intensément"* : $\mathrm{Int}(A) = \begin{cases} 2\mu_a & \text{si } \mu_a \leq 0{,}5 \\ 1-2(1-\mu_a) & \text{si } \mu_a > 0{,}5 \end{cases}$

- *"plutôt"* : $\mathrm{Plut}(A) = \begin{cases} 2\mu_a{}^2 & \text{si } \mu_a \leq 0{,}5 \\ 1-2(1-\mu_a)^2 & \text{si } \mu_a > 0{,}5 \end{cases}$

Annexe 2 : Bilan des différents types de description

L'objectif de cette annexe est de faire le bilan des descriptions que l'on peut traiter.

- Les propriétés simples

A est grand *A est petit* *A est moyen*
A est très grand *A est très petit* *A est très très grand*
A est très moyen (sens différent) *A est plus ou moins grand*

- Les propriétés paramétrées

A est de 1m80 *A est entre 1m75 et 1m85* *A est d'environ 1m80*
A est environ entre 1m75 et 1m85

- Les propriétés relatives

A est loin de B *A est très proche de B* *A est relativement loin de B*
A est proche de 1m80

- Les comparaisons simples

A est plus grand que B *A est plus petit que B*
A est plus moyen que B (ne se dit pas) *A est beaucoup plus grand que B*

A est plus grand que 2m *A est plus petit que 2m* *A est supérieur à 2m*
A est inférieur à 2m *A est plus moyen que 2m (ne se dit pas)*

A est aussi grand que B *A est aussi petit que B* *A est aussi moyen que B*
A est de même taille que B
A est à peu près aussi grand que B *A est plus haut que long*

A est 4 fois plus grand que B *A est 4 fois plus petit que B*
A est 4 fois plus moyen que B (ne se dit pas)

- Les propriétés de comparaison relatives

A est plus loin de B que C
A est plus loin que C par rapport à B
A est plus loin de B que de C

Annexe 3 : Les fonctions d'appartenance

1. Introduction

Nous allons parcourir quelques techniques fréquemment utilisées pour représenter les fonctions d'appartenance. Elles sont pratiques à manipuler et simples à mettre en place. Ces techniques sont tirées, entre autres, de : [Bou93], [Buh94], [HBC91] et [Ton95].

2. Représentation par énumération

Cette solution consiste à définir une fonction d'appartenance en énumérant les degrés d'appartenance pour tous les éléments du domaine. Il est donc clair que cette solution n'est utilisable que pour un domaine discret (ou discrétisé) et dont le nombre d'éléments n'est pas trop important.

Remarque : Cette technique est applicable aussi pour les propriétés qui ne sont pas des intervalles flous.

3. Représentation par les parties croissantes et décroissantes

Pour simplifier un peu l'énumération, uniquement pour les intervalles flous et les nombres flous, une autre solution consiste à n'énumérer que les parties croissantes et décroissantes de la fonction. Entre les deux, le degré d'appartenance est forcément à 1.

4. Représentation L-R

4.1. Généralité

Pour faciliter les traitements, nous utilisons souvent les fonctions d'appartenance de type L-R (voir [Tong95], [Bou93] et [HBC91]). Elles sont totalement définies par un quadruplet de réels $<\alpha,a,b,\beta>$ (avec $a\leq b$, α et $\beta > 0$), ou par quatre points $(a-\alpha, a, b, b+\beta)$, et par deux fonctions L et R appelées fonctions de forme. Celles-ci sont décroissantes et semi-continues supérieurement.

Elles sont définies par :

$$L : \; r^+ \rightarrow [0,1] \qquad\qquad R : \; r^+ \rightarrow [0,1]$$
$$\quad t \rightarrow L(t) \qquad\qquad\qquad t \rightarrow R(t)$$

De plus :

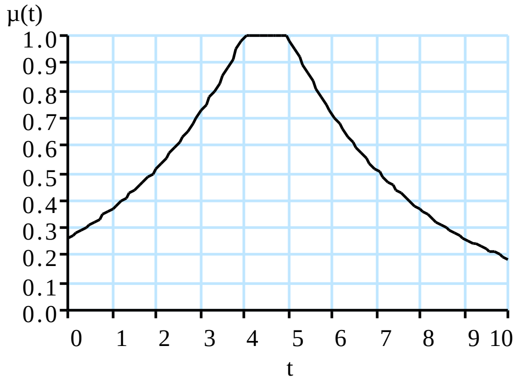
$x<1$, $L(x)>0$, $R(x)>0$ et $x>0$, $L(x)<1$, $R(x)<1$

$L(0) = R(0) = 1$; $L(1) = R(1) = 0$; $L(+\infty) = R(+\infty) = 0$

L'expression d'une fonction d'appartenance L-R définie par le quadruplet <α,a,b,β> et les fonctions L(x) et R(x) est :

$$\mu_{<\alpha,a,b,\beta>,\,L,\,R} : \mathit{r} \to [0,1]$$
$$t \to \begin{cases} L((a - t) / \alpha) & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } a \le t \le b \\ R((t - b) / \beta) & \text{si } t > b \end{cases}$$

Remarque : Il existe un certain nombre de fonctions L-R, comme par exemple : $L(x) = R(x) = e^{-x}$ (voir courbe A-1).



Courbe A-1 : exemple de fonction L-R

4.2. Cas particuliers de fonctions L-R

Nous choisirons des fonctions L(x) et R(x) avec des caractéristiques bien particulières. La première donne la forme de la courbe entre les deux premiers points (a-α et a) et la seconde entre le deux derniers (b et b+β). Entre les deux points intermédiaires (a et b), μ(t)=1. Avant le premier point (a-α) et après le dernier (b+β), μ(t)=0. Dans ce cas, nous autorisons des valeurs de α et β à 0 (les deux premiers points et/ou les deux derniers sont confondus).

L'expression d'une fonction d'appartenance L-R définie par le quadruplet <α,a,b,β> (α, β ≥ 0) et les fonctions L(x) et R(x) ayant les caractéristiques ci-dessus se réécrit de la manière suivante :

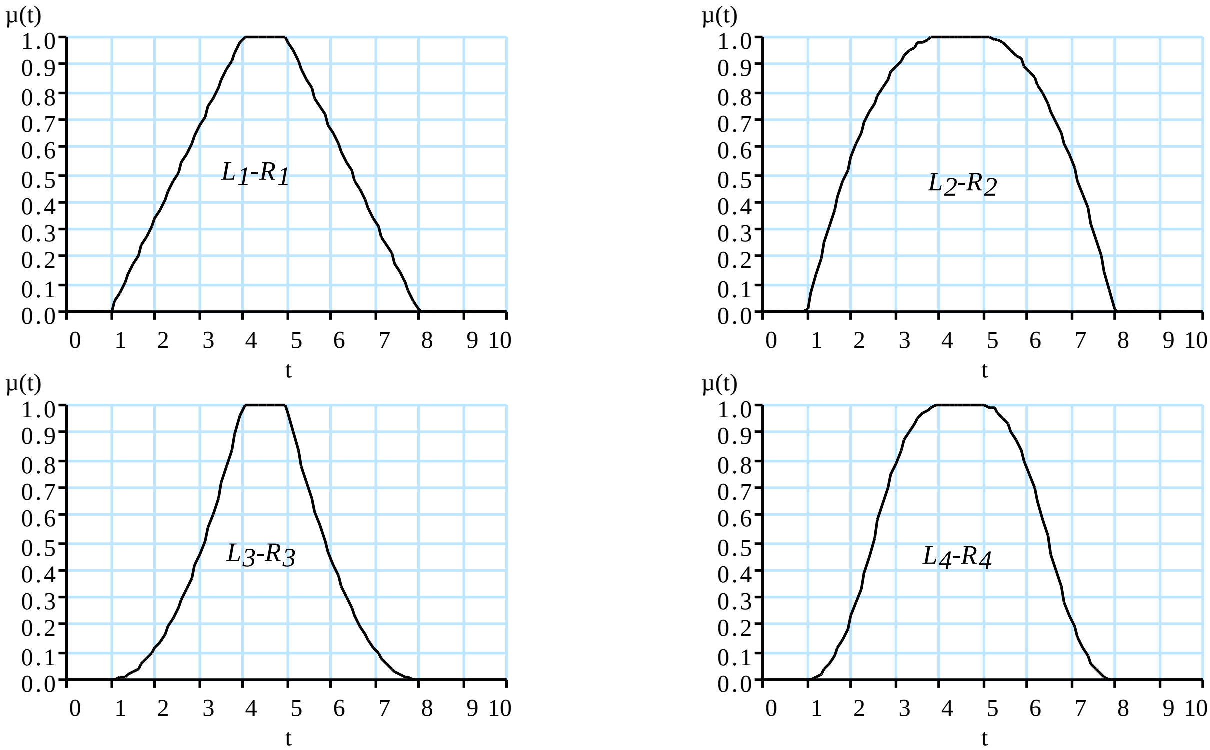
$$\mu_{<\alpha,a,b,\beta>,\,L,\,R} : \mathit{r} \to [0,1]$$
$$t \to \begin{cases} 0 & \text{si } t < a-\alpha \\ L((a - t) / \alpha) & \text{si } (\alpha \ne 0) \text{ et } (a-\alpha \le t < a) \\ 1 & \text{si } a \le t \le b \\ R((t - b) / \beta) & \text{si } (\beta \ne 0) \text{ et } (b < t \le b+\beta) \\ 0 & \text{si } t > b+\beta \end{cases}$$

Cette catégorie de fonction L-R possède un certain nombre de caractéristiques intéressantes. Soit la fonction d'appartenance d'un ensemble flou P définie par <α,a,b,β> et deux fonctions L(x) et R(x) bien choisies (par exemple dans celle présentées ci-dessus), on a alors :

- L'intervalle [a,b] est le noyau de la propriété.
- α et β donnent la largeur des intervalles autour du noyau. Ils permettent de définir le segment support $[a-\alpha, b+\beta]$.
- $\alpha>0$ ou $\beta>0$ si et seulement si P est floue
- $\alpha>0$ ou $\beta>0$ et $a \neq b$ si et seulement si P est un intervalle flou
- $\alpha>0$ ou $\beta>0$ et $a=b$ si et seulement si P est un nombre flou
- $\alpha=0$ et $\beta=0$ et $a \neq b$ si et seulement si P est imprécis (intervalle classique [a,b])
- $\alpha=0$ et $\beta=0$ et $a=b$ si et seulement si P est précis (nombre classique $\{a\}$)

Les fonctions L(x) et R(x) les plus intéressantes ayant les caractéristiques que nous avons posées sont (voir courbe A-2) :

- $L_1(x) = R_1(x) = \mathrm{Max}(0, 1-x)$ (ce sont les plus utilisées en T.S.E.F. et sont appelées fonctions trapézoïdales),
- $L_2(x) = R_2(x) = \mathrm{Max}(0, 1-x^2)$,
- $L_3(x) = R_3(x) = \mathrm{Max}(0, 1-x)^2$,
- $L_4(x) = R_4(x) = 2*\mathrm{Max}(0,1-x)^2$ si $x>0.5$
  $\mathrm{Max}(0,1-2*x^2)$ sinon.



Courbe A-2 : Fonctions L-R particulières

De plus, ces fonctions sont faciles à manipuler, simples à calculer et les fonctions pour modifier leur forme sont faciles à mettre en place. Elles permettent de faire des approximations satisfaisantes de fonctions complexes. C'est pour cela qu'elles sont très souvent utilisées en T.S.E.F.

5. Représentation par une fonction

Enfin, il existe un certain nombre de fonctions utilisées pour n'importe quelle propriété. En voici quelques unes (voir courbe A-3) :

- Fonction 1 ; fonction en cloche, où t_o détermine la position du sommet et a impose la largeur de la courbe :

$$\mu(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{t-t_0}{a}\right)^2}$$

- Fonction 2 ; fonction en cloche trigonométrique, où t_o détermine la position du sommet et a impose la largeur de la courbe :

$$\mu(t) = \frac{1+\cos\frac{\pi(t-t_0)}{2a}}{2} \text{ si } t_0-2a \leq t \leq t_0+2a \quad \text{et} \quad \mu(t) = 0 \text{ sinon}$$

- Fonction 3 ; En extension de la fonction précédente, afin d'élargir le sommet :

$$\mu(t) = \frac{1+\cos\frac{\pi(t-t_1)}{2a_1}}{2} \text{ si } t_1-2a_1 \leq t \leq t_1$$

$\mu(t) = 1$ si $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\mu(t) = \frac{1+\cos\frac{\pi(t-t_2)}{2a_2}}{2} \text{ si } t_2 \leq t \leq t_2+2a_2$$

$\mu(t) = 0$ sinon

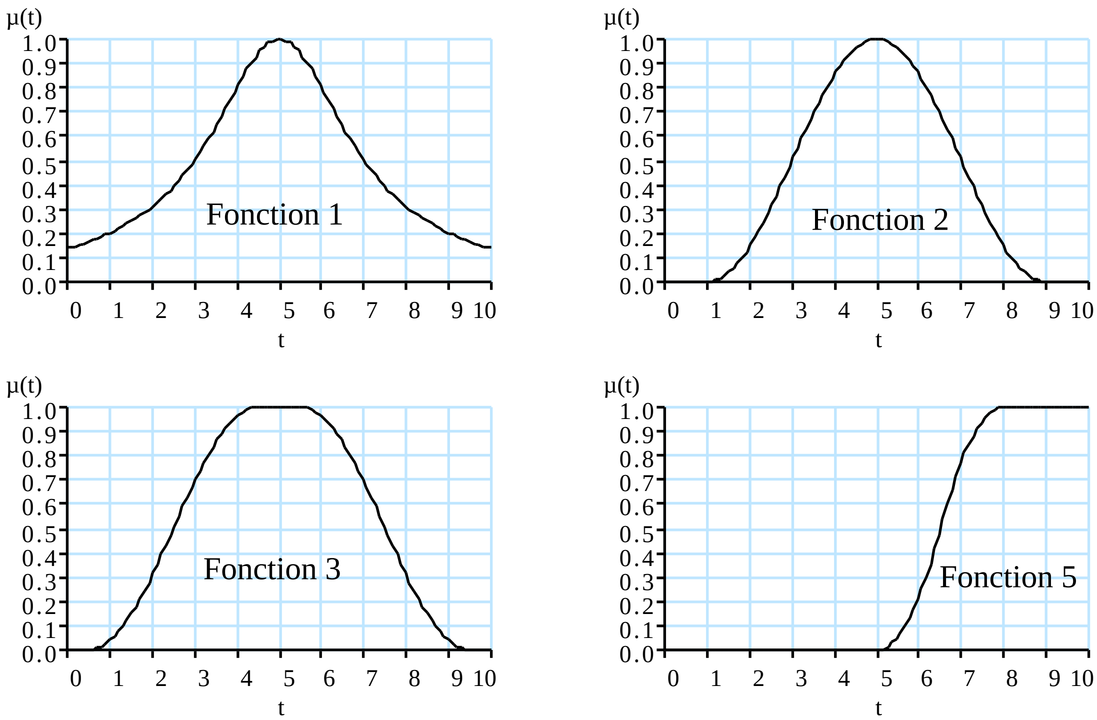
- Fonction 4 ; fonction composée par des morceaux de droite.
- Fonction 5 ; fonction asymétrique où a et c déterminent la zone floue.

$\mu(t) = 0$ si $x \leq a$

$$\mu(t) = \frac{2(t-a)^2}{(c-a)^2} \text{ si } a<x \text{ et } x<(c+a)/2$$

$$\mu(t) = 1 - \frac{2(t-c)^2}{(c-a)^2} \text{ si } (c+a)/2 \leq x \text{ et } x<c$$

$\mu(t) = 1$ sinon



Courbe A-3 : Exemples de fonctions