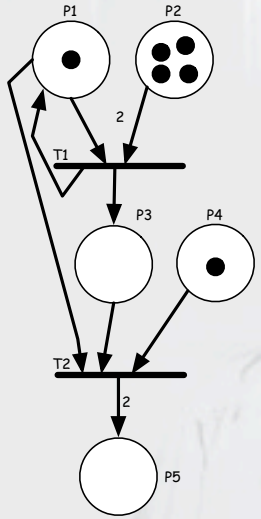
UNIVERSITÉ DE NANTES

Introduction à la modélisation

Réseaux de Petri

E. Desmontils (Dpt Informatique)
emmanuel.desmontils@univ-nantes.fr
Université de Nantes
version 1.6



Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de Modification 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/
ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

BY NC ND
E. Desmontils

Introduction

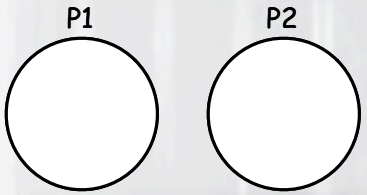
- RdP : Réseau de Petri
  - Carl Adam Petri, 1962
- Modéliser le comportement
  - automatismes,
  - protocoles réseaux,
  - informatique embarquée
  - modélisation de SI…
- Théorie mathématique
  - comme d'autres : automates d'état fini…
- Prépare le terrain au MCT (extension)

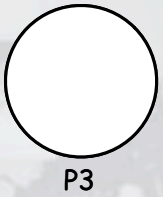
E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ





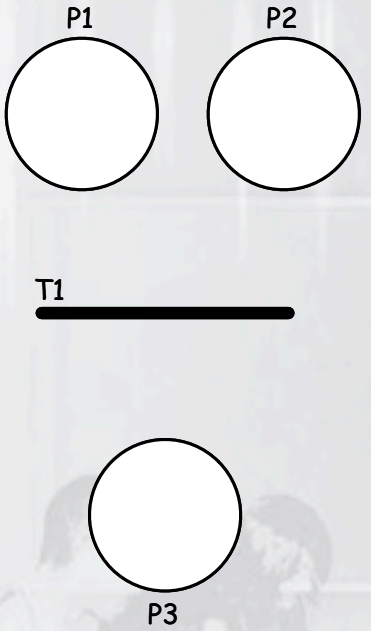
- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ
- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

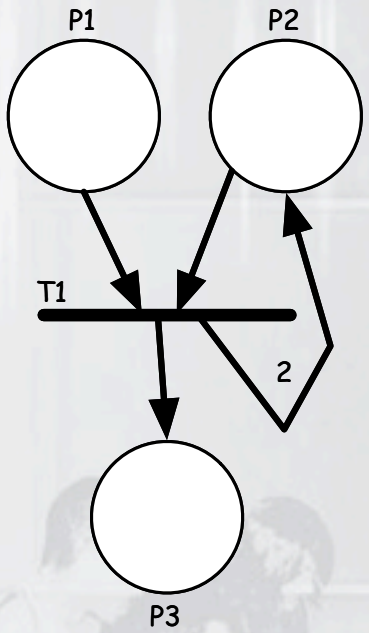


E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ



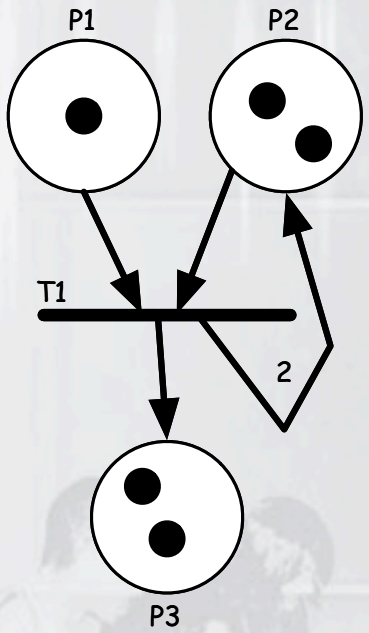
- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ



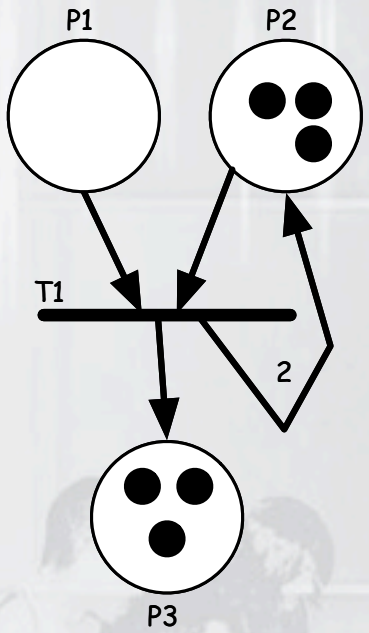
- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ



- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ



- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

E. Desmontils

Notions de base

Graphe bi-parties

- 4 notions
  - ens. fini de places : P ={P1, P2, P3...}
  - ens. fini de transitions : T={T1, T2...}
  - ens. fini d'arcs : A ⊆ PxT ∪ TxP
  - jetons
    - (Vecteur de) Marquage
      - places + jetons
      - marquage initial : situation de départ



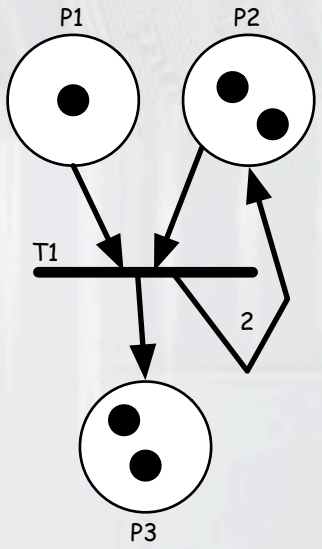
- Dynamique du RdP :
  - règles d'évolution du marquage
  - moniteur d'exécution
    - stratégie d'application des règles

E. Desmontils

Places, Jetons & Marquages

- Place : conteneur de jetons

- Place en entrée d'une transition
  - p ∈ P en entrée de t : (p,t) ∈ A
  - E(t) : entrée de t
    - ensemble des places en entrée de t
    - p ∈ E(t)



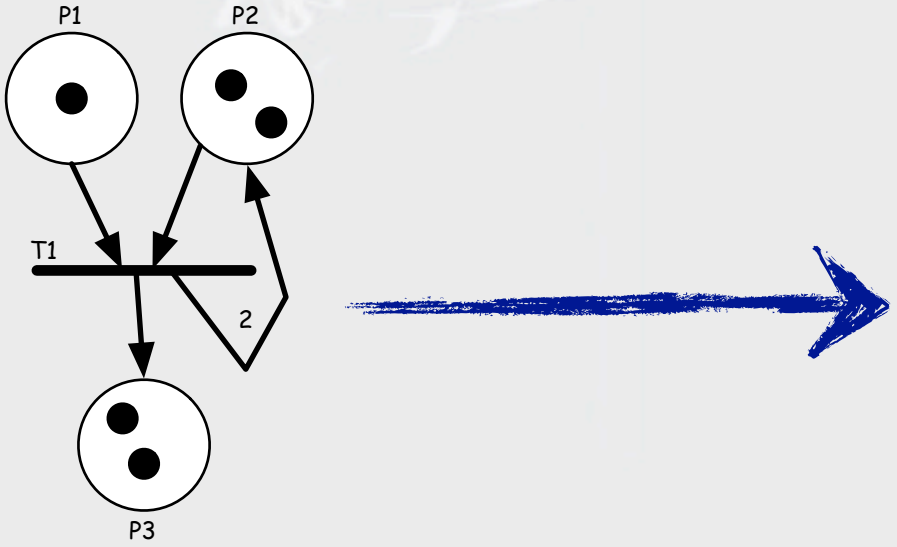
- Place en sortie d'une transition
  - p ∈ P en sortie de t : (t,p) ∈ A
  - S(t) : sortie de t
    - ensemble des places en sortie de t
    - p ∈ S(t)

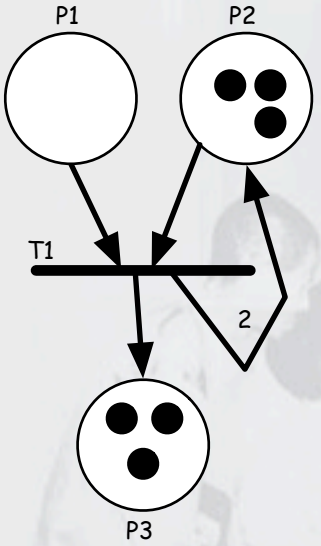
P1 et P2 sont en entrée de T1
E(T1) = {P1, P2}
P3 et P2 sont en sortie de T1
S(T1) = {P3, P2}

E. Desmontils

Places, Jetons & Marquages

- Vecteur de marquage :
  nombre de jetons
  dans chacune des places
  à un instant donné
  - M_t : P -> $\mathbb{N}$
  - Marquage initial M_0 : marquage avant de faire fonctionner le RdP





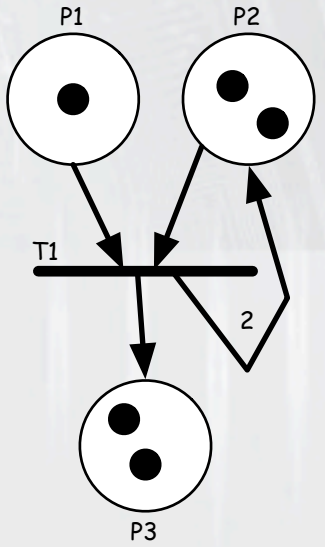
$M_1 = \{1,2,2\}$

$M_2 = \{0,3,3\}$

E. Desmontils

Places, Jetons & Marquage

- RdP : évolue dans le temps
  - le marquage change après application d'une transition
  - géré par le moniteur d'exécution



$W(P1 \rightarrow T1) = 1$
$W(P2 \rightarrow T1) = 1$
$W(T1 \rightarrow P3) = 1$
$W(T1 \rightarrow P2) = 2$

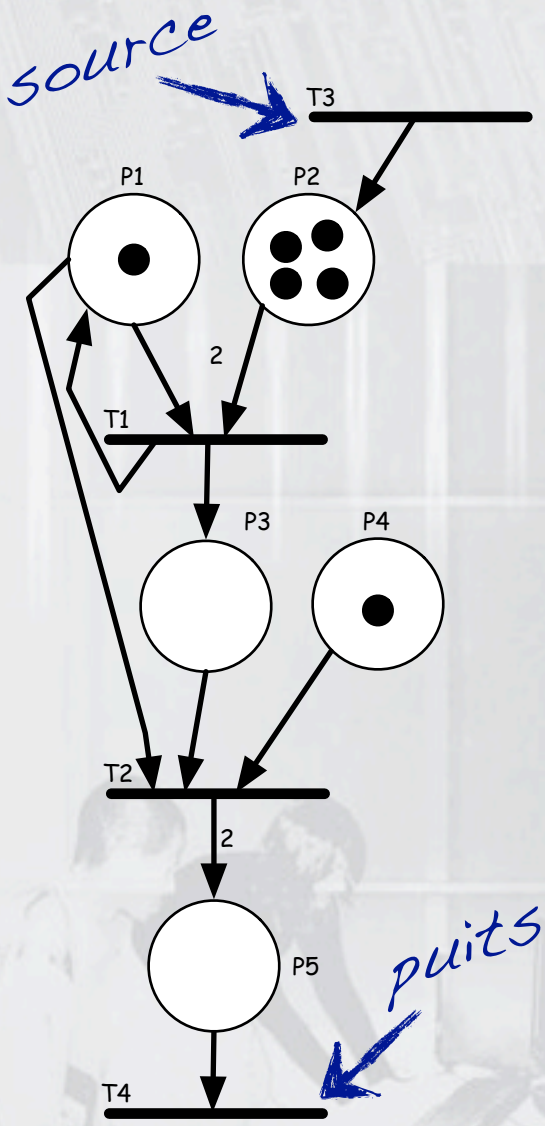
- les arcs «déplacent» les jetons selon leur poids
  - circulation simultanée de jetons
  - par défaut : 1 seul jeton
  - W : A -> $\mathbb{N}^+$

Donc «T1 -> P2» fera transiter 2 jetons systématiquement alors que les autres n'en font transiter qu'un !

BY NC ND
E. Desmontils

Notions complémentaires

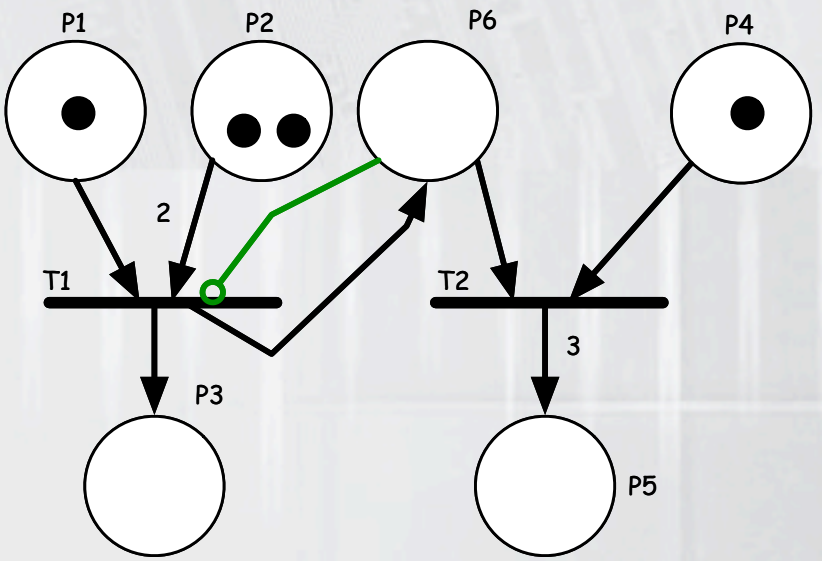
- Transition «puits»
  - sortie vide : ne produit rien, se contente de consommer
  - $S(t_{puits}) = \varnothing$
- Transition «source»
  - entrée vide : ne consomme rien, se contente de produire
  - toujours déclenchable !
  - $E(t_{source}) = \varnothing$
- Permettent de représenter les interactions avec le «monde extérieur»



E. Desmontils

Notions complémentaires

- Arc inhibiteur
  - Uniquement dans PxT
    - en entrée d'une transition
  - Poids à 0
    - W à 0 pour cet arc
    - Donc W : A -> $\mathbb{N}^*$

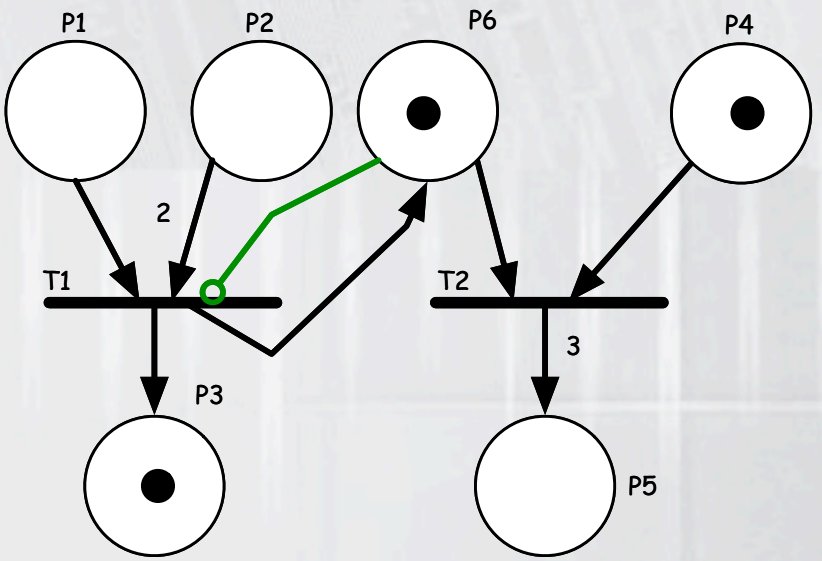


T1 n'est déclenchable QUE SI P6 ne contient pas de jetons !

E. Desmontils

Notions complémentaires

- Arc inhibiteur
  - Uniquement dans PxT
    - en entrée d'une transition
  - Poids à 0
    - W à 0 pour cet arc
    - Donc W : A -> $\mathbb{N}$*

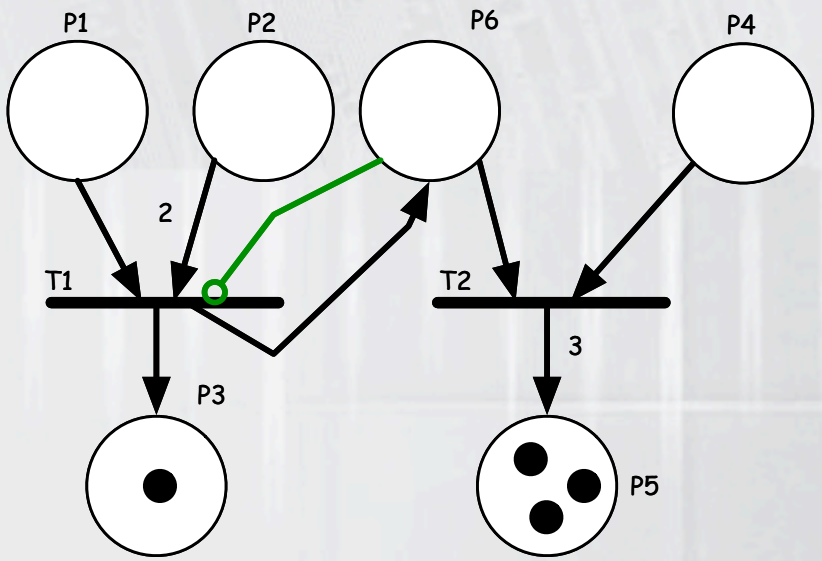


T1 n'est déclenchable QUE SI P6 ne contient pas de jetons !

E. Desmontils

Notions complémentaires

- Arc inhibiteur
  - Uniquement dans PxT
    - en entrée d'une transition
  - Poids à 0
    - W à 0 pour cet arc
    - Donc W : A -> $\mathbb{N}$*

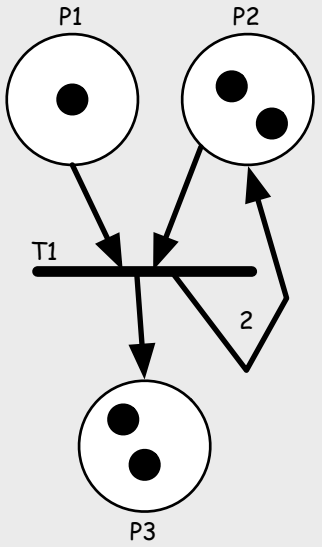


T1 n'est déclenchable QUE SI P6 ne contient pas de jetons !

E. Desmontils

Définition plus formelle

- 5-uplet {P, T, A, W, M_0} :
  - P : ensemble fini de places
  - T : ensemble fini de transitions
  - $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$: ensemble fini d'arcs
  - W : A -> $\mathbb{N}+$: fonction décrivant le poids des arcs
  - M_0 : P -> $\mathbb{N}$: vecteur de marquage initial



$P = \{P_1, P_2, P_3\}$

$T = \{T_1\}$

$A = \{(P_1, T_1), (P_2, T_1), (T_1, P_3), (T_1, P_2)\}$

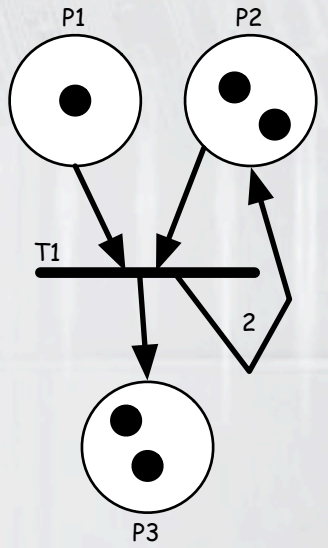
$W = \{1, 1, 1, 2\}$

$M_0 = \{1, 2, 2\}$

E. Desmontils

Dynamique d'un RdP

- Transition déclenchable ?
  - les places en entrée ont suffisamment de jetons au regard du poids des arcs qui les lient à la transition

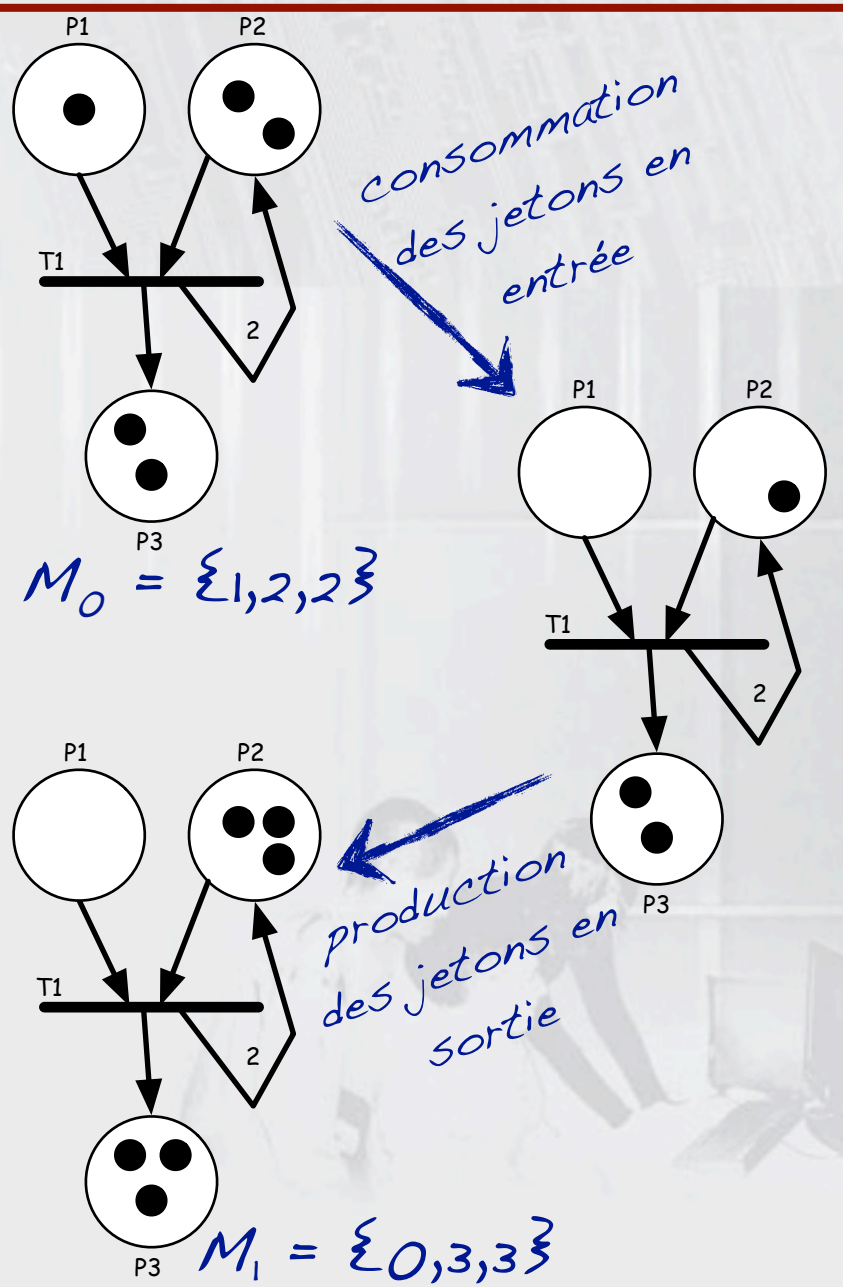


T1 est déclenchable, car elle attend 1 jeton dans P1 et 1 jeton dans P2

E. Desmontils

Dynamique d'un RdP

- Déclenchement d'une transition
  - elle agit sur les places en entrée et en sortie
    - consomme les jetons des places en entrée
    - produit des jetons dans les places en sortie
  - les quantités (consommées et produites) sont définies par W (poids des arcs)
  - le nombre total de jetons n'est pas nécessairement constant



E. Desmontils

Dynamique d'un RdP

- Plusieurs transitions = plusieurs possibilités d'effectuer des modifications sur le RdP
- Nécessité de choisir
  - Moniteur d'exécution : chargé d'orchestrer l'exécution du RdP
  - Fixe les règles définissant modalités et contraintes
    - détermination des transitions candidates (déclenchables, tirables, franchissables)
      - les places en entrée ont suffisamment de jetons au regard du poids des arcs qui les lient à la transition
    - sélection de la transition à appliquer
    - «exécution» de la transition (consommation/production)

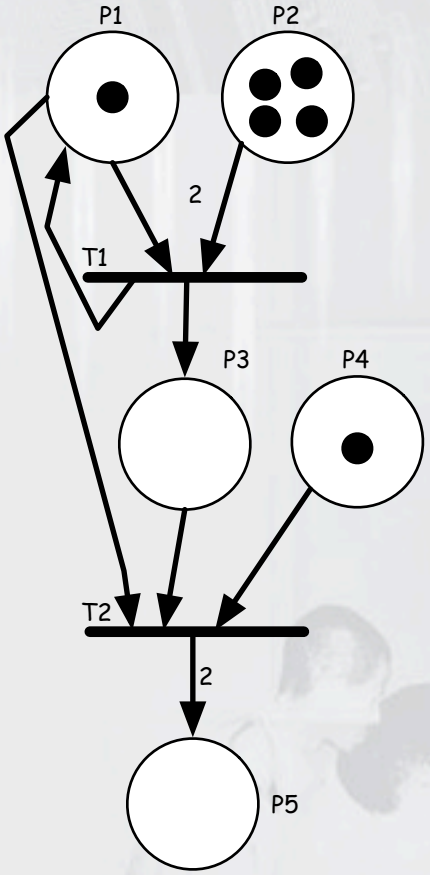
tant que c'est possible...

E. Desmontils

Exemple d'exécution

t_0 : T1 est déclenchable, car elle attend 1 jeton en P1 et 2 jetons dans P2

Elle est la seule, donc elle est déclenchée

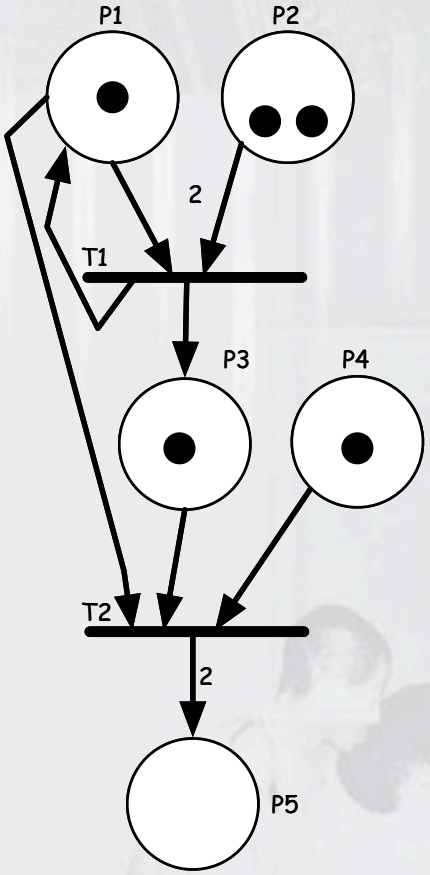


E. Desmontils

Exemple d'exécution

t_1 : T1 est déclenchable, car elle attend 1 jeton en P1 et 2 jetons dans P2
De même, T2 est déclenchable, car elle attend 1 jeton en P1, 1 jeton en P3 et 1 jeton en P4

Il faut choisir !
Appliquons à nouveau T1 !

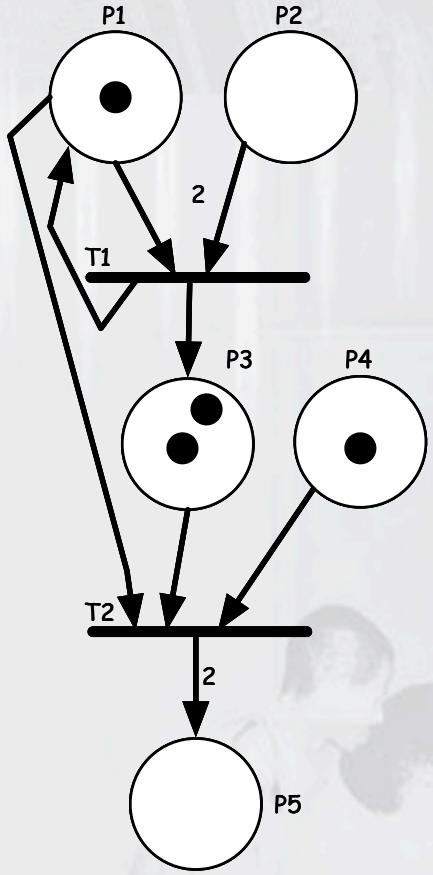


BY NC ND
E. Desmontils

Exemple d'exécution

t_2 : seule T2 est applicable

Elle est déclenchée !

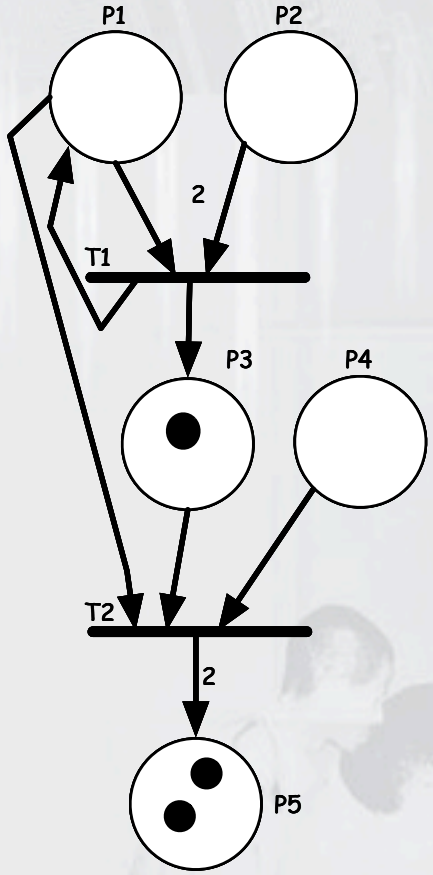


E. Desmontils

Exemple d'exécution

t_3 : plus aucune transition n'est déclenchable

Le moniteur ne peut plus rien faire !
Il est bloqué !



E. Desmontils

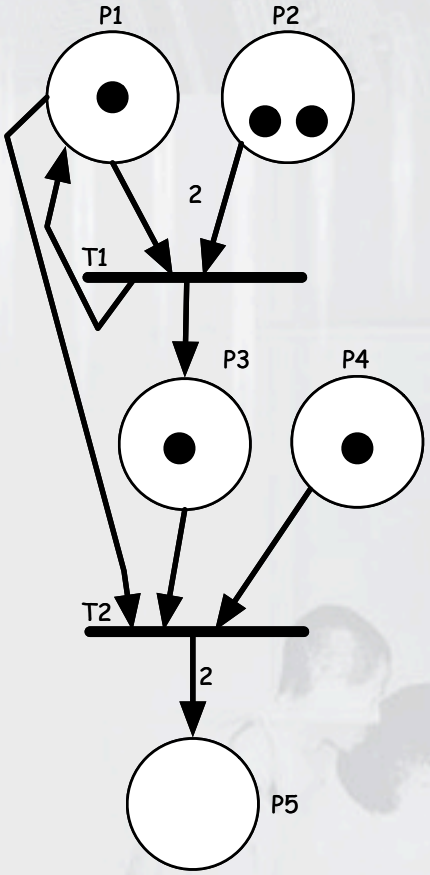
Exemple d'exécution

Mais remontons dans le temps...

t_1 : T1 était déclenchable, car elle attend 1 jeton en P1 et 2 jetons dans P2

De même, T2 était déclenchable, car elle attend 1 jeton en P1, 1 jeton en P3 et 1 jeton en P4

Il fallait choisir ! A la place de T1, appliquons plutôt T2 !

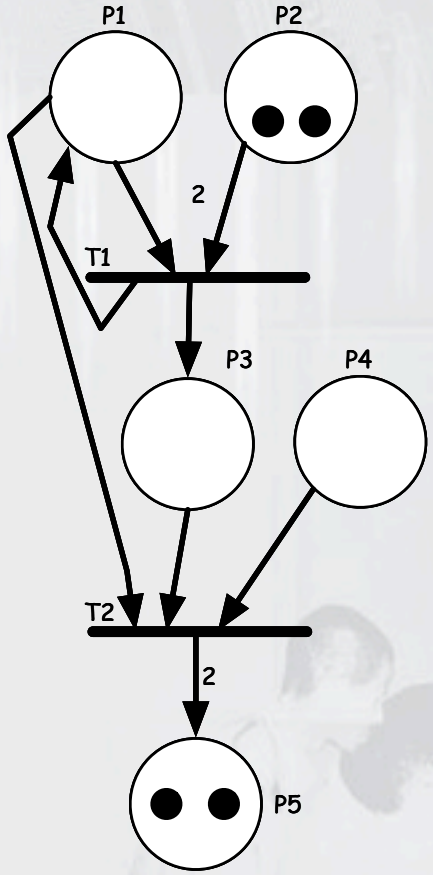


E. Desmontils

Exemple d'exécution

t_2' : là encore, plus aucune transition n'est déclenchable

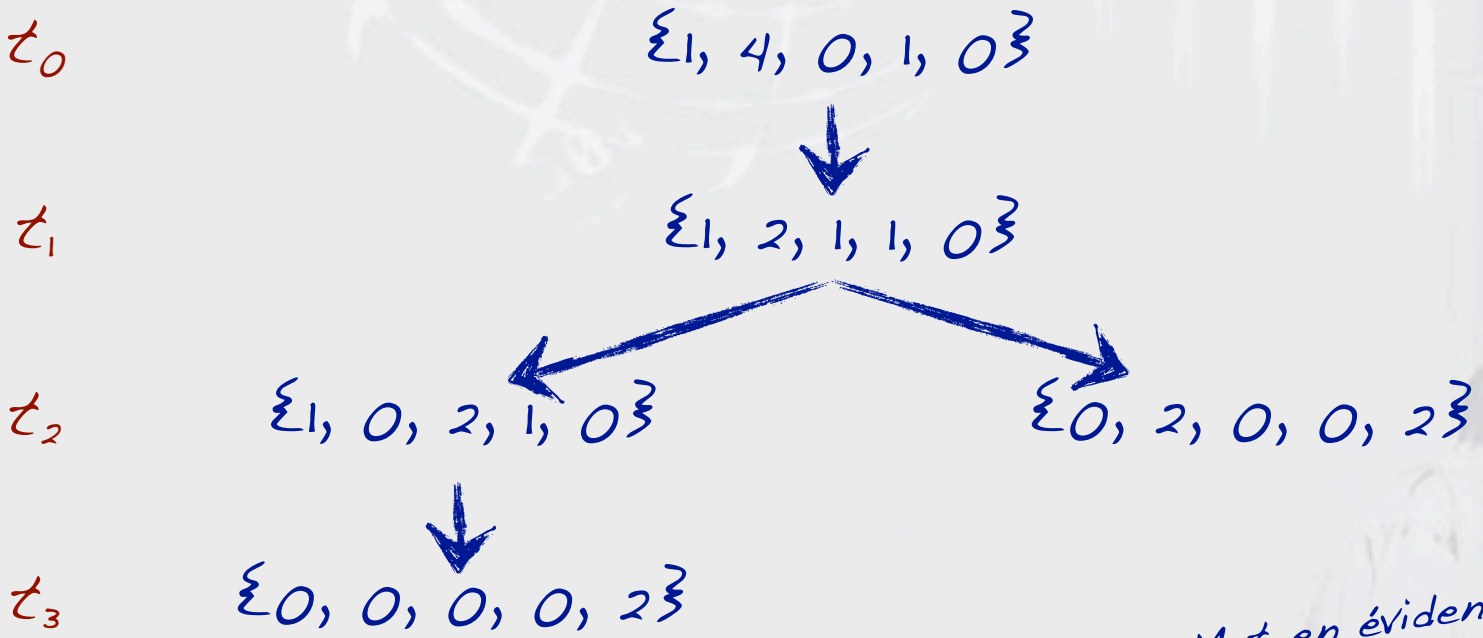
Le moniteur ne peut plus rien faire !
Il est bloqué !



E. Desmontils

Dynamique d'un RdP

- Évolution du RdP
  = Évolution des jetons dans les places
  => Évolution du marquage : graphe de marquage



Met en évidence : alternatives, boucles, situations de blocage, points de passage obligés, etc.

E. Desmontils

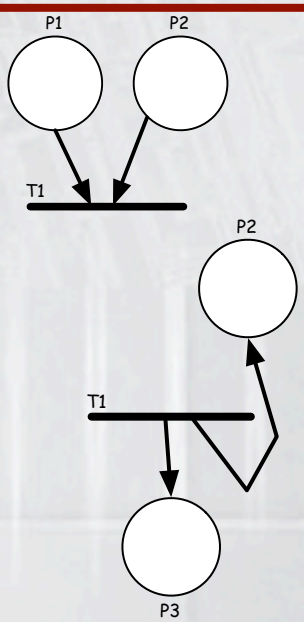
Stratégies du moniteur d'exécution ?

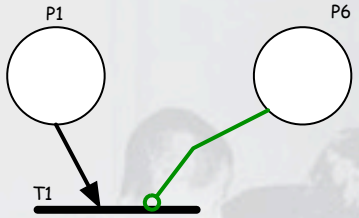
- Plusieurs transitions possibles ? Laquelle choisir ?
  - la première dans T (ou la dernière)
  - la moins souvent déclenchée (ou l'inverse)
  - celle qui produit le plus (le moins)
  - par tirage aléatoire (au hasard)
  - la plus proche de l'objectif
  - la plus forte priorité
  - ...
- Retour arrière ?
  - toutes seront essayées
- Toutes en parallèle ?

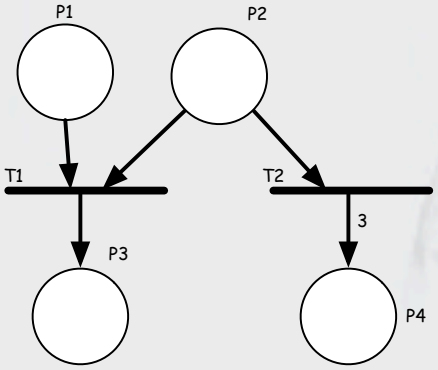
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Logique sous-jacente ?
  - Places en entrée = liées par un ET logique
  - Places en sortie = liées par un ET logique
  - Arcs inhibiteurs = liés au NON logique
  - Place «partagée» par deux transitions = OU logique…
    - bof







BY NC ND
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Modélisation :
  - par composition de RdP (à synchroniser)
  - vs. par un seul
- Éléments de modélisation ?

BY NC ND
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Modélisation :
  - par composition de RdP (à synchroniser)
  - vs. par un seul
- Éléments de modélisation ?

Transitions	Précondition, postconditions
Places	Traitements
Arcs	Connecteurs
Jetons	Événements (discrets ou continus) ou ressources

BY NC ND
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

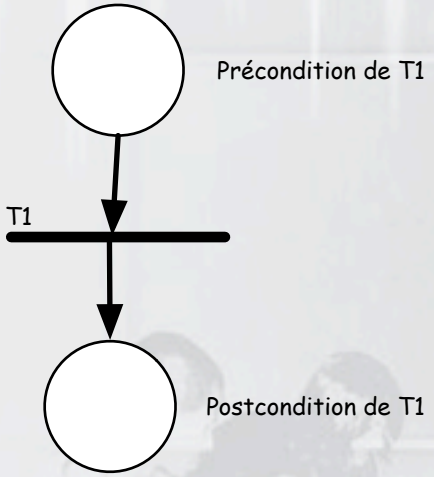
- Modélisation :
  - par composition de RdP (à synchroniser)
  - vs. par un seul
- Éléments de modélisation ?

Transitions	Traitements
Places	Précondition, postconditions
Arcs	Connecteurs
Jetons	Événements (discrets ou continus) ou ressources

E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

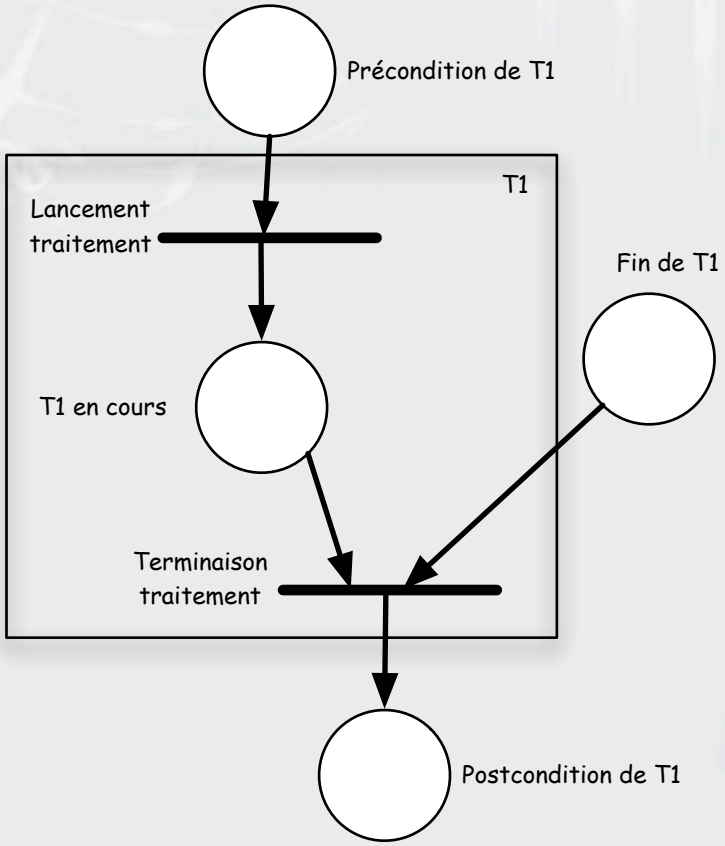
- Point de vue des transitions
  - traitements
  - séquences ininterruptibles



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

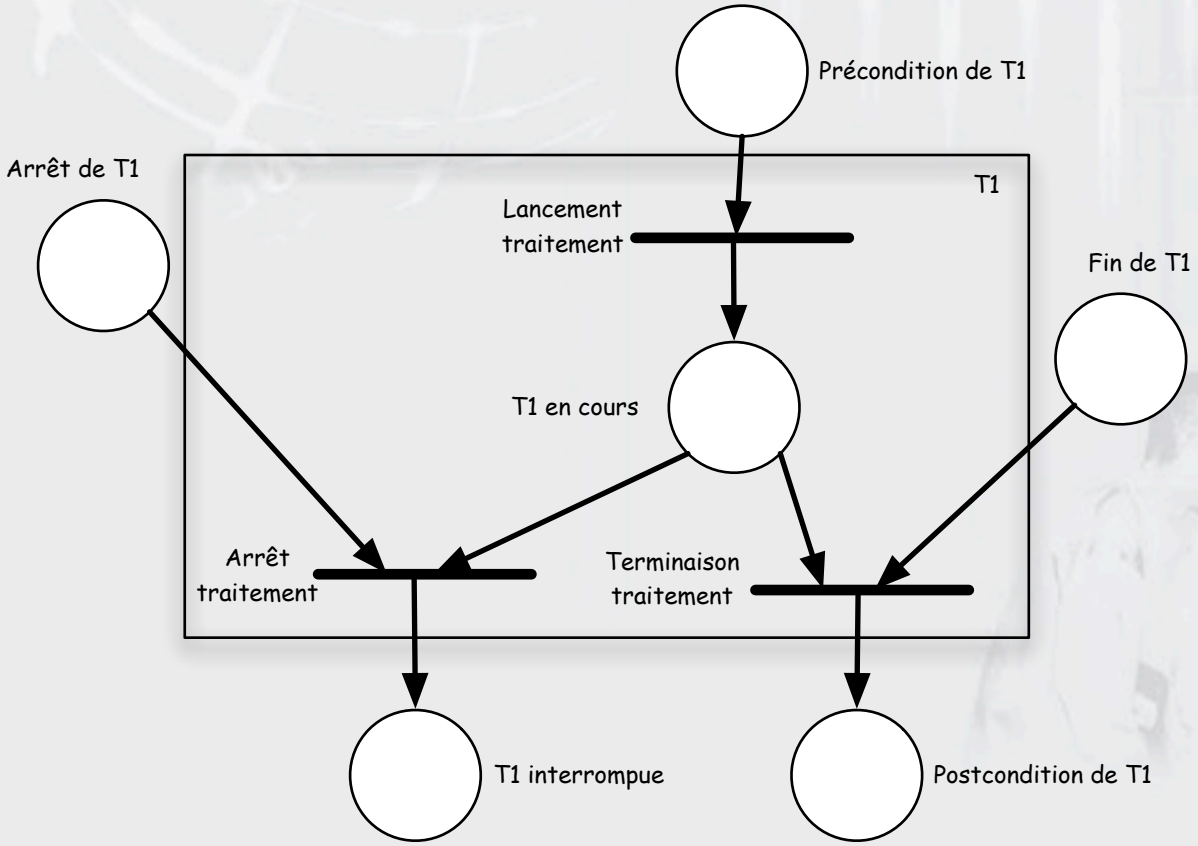
- Point de vue des transitions
  - traitements
  - séquences interruptibles ?



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

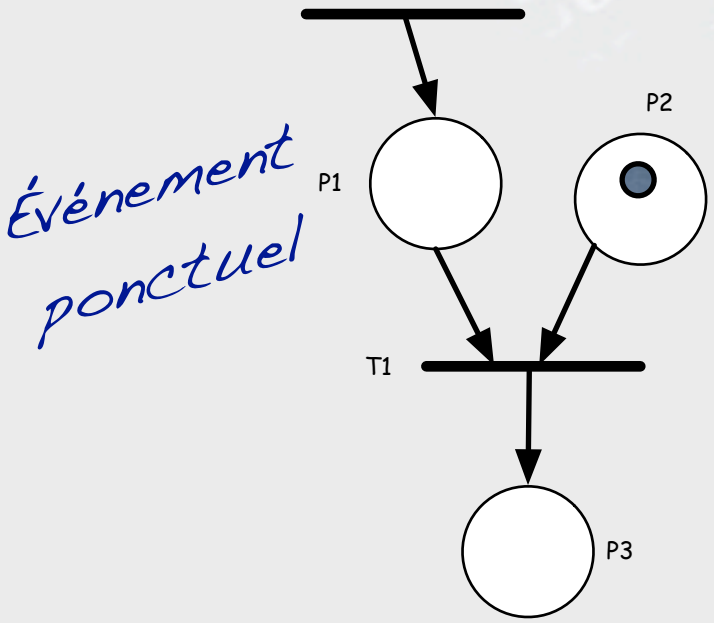
- Point de vue des transitions
  - traitements
  - séquences interruptibles ?

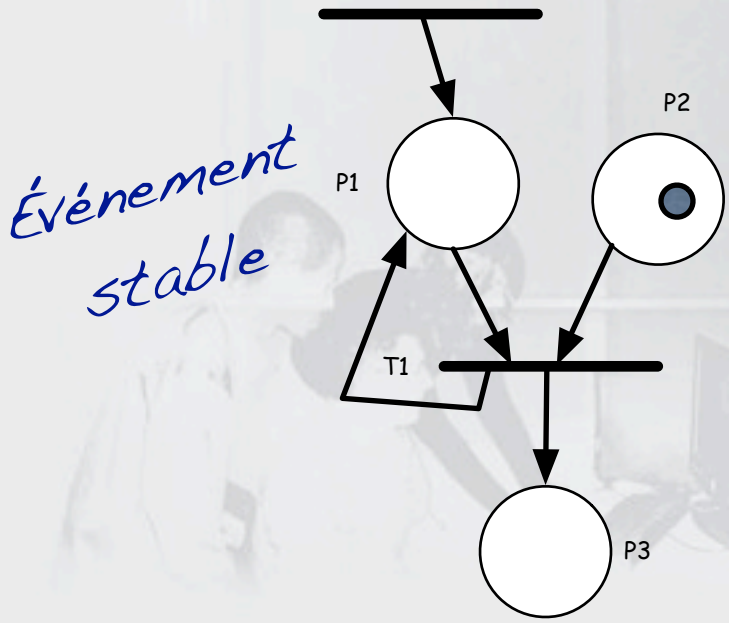


E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Point de vue des places
  - lieux de stockage des conditions de déclenchement, des signaux, des disponibilités de ressource
- Point de vue des jetons
  - signaux, événements, ressources

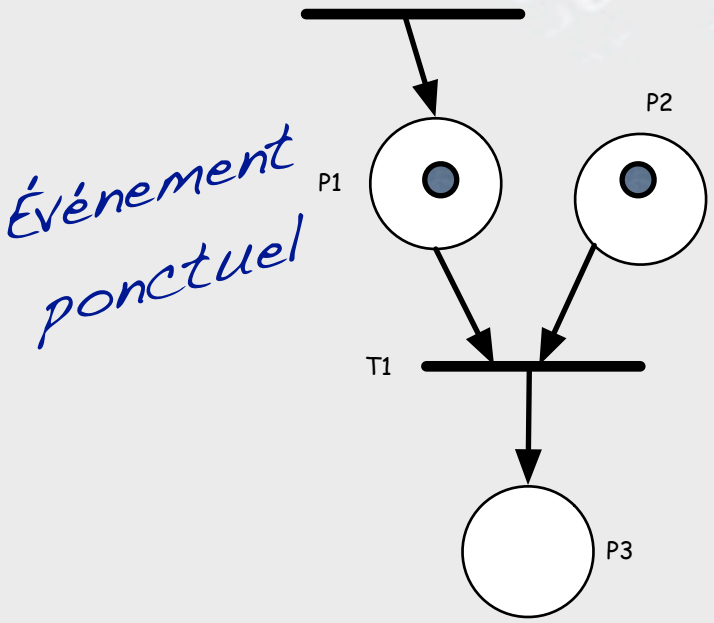


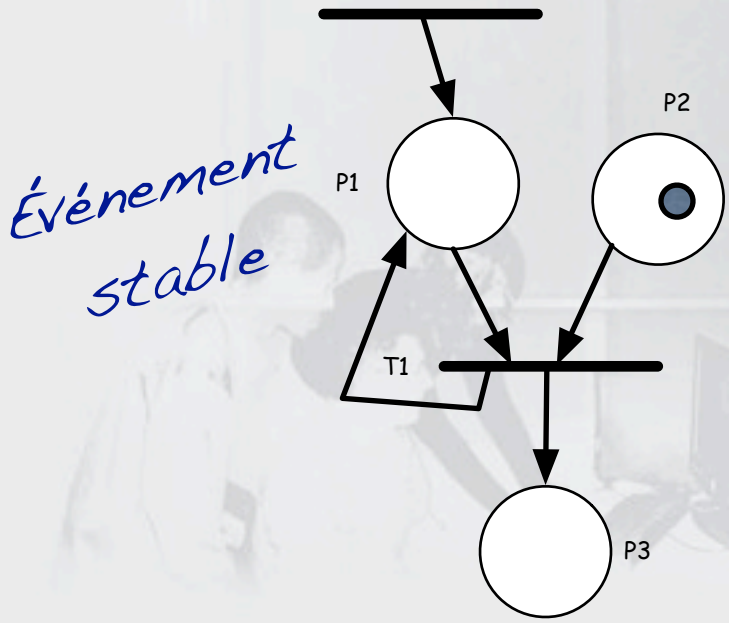


E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Point de vue des places
  - lieux de stockage des conditions de déclenchement, des signaux, des disponibilités de ressource
- Point de vue des jetons
  - signaux, événements, ressources

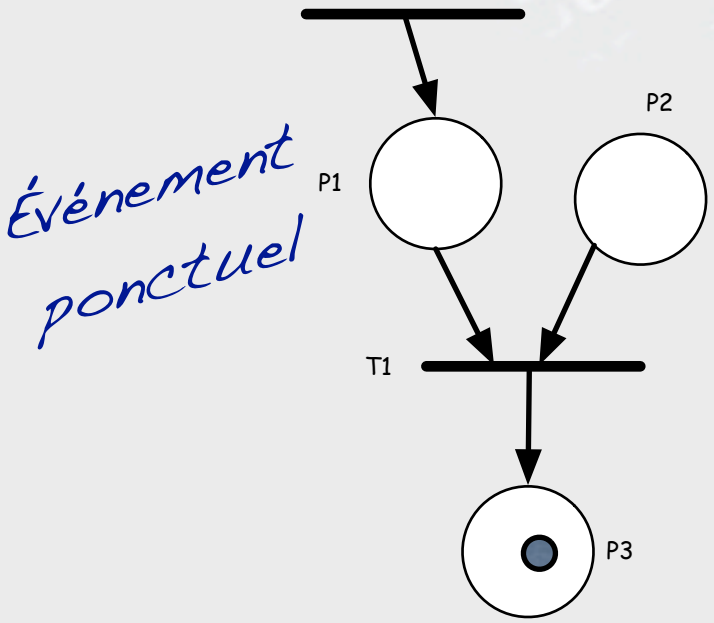


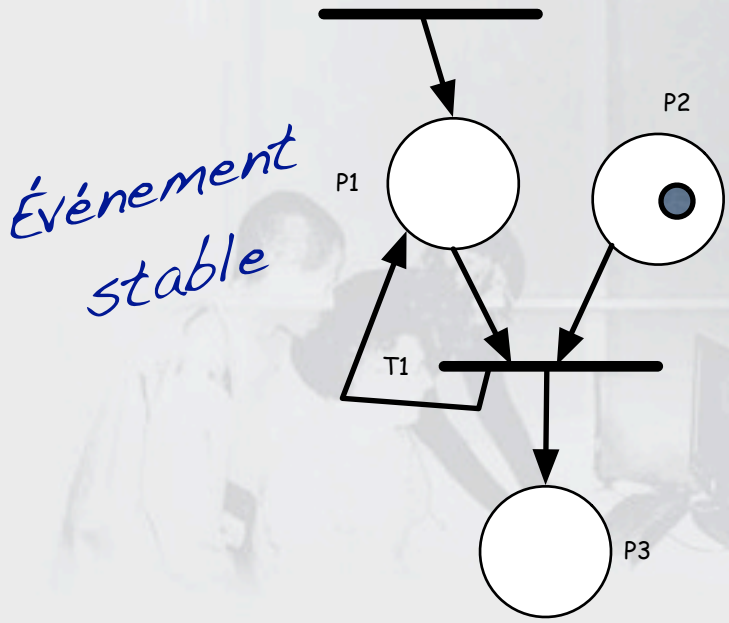


E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Point de vue des places
  - lieux de stockage des conditions de déclenchement, des signaux, des disponibilités de ressource
- Point de vue des jetons
  - signaux, événements, ressources

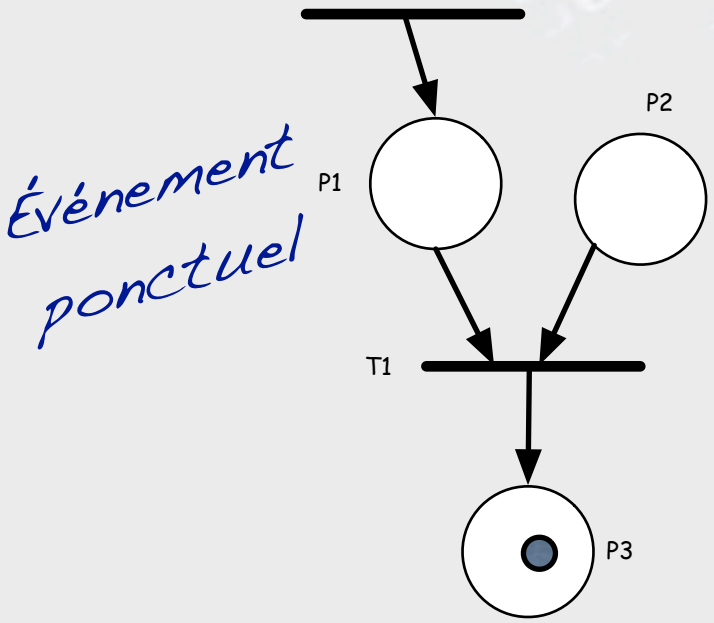


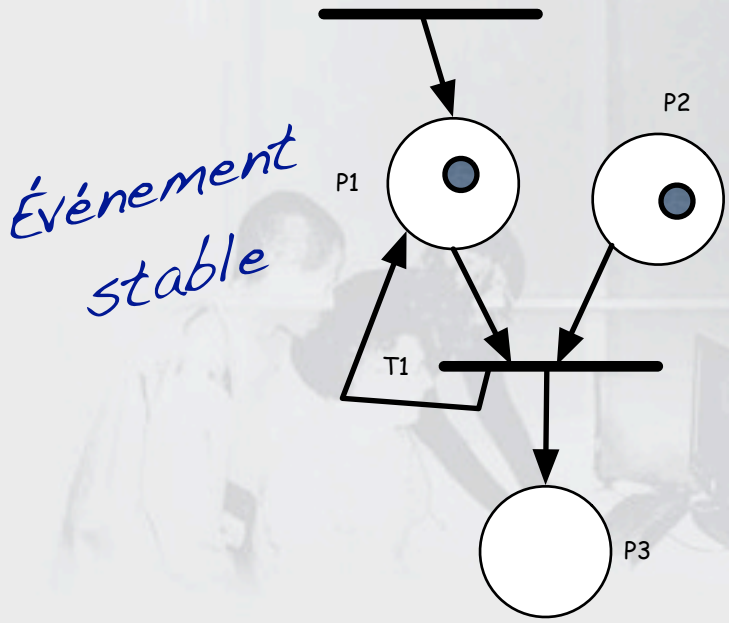


E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Point de vue des places
  - lieux de stockage des conditions de déclenchement, des signaux, des disponibilités de ressource
- Point de vue des jetons
  - signaux, événements, ressources

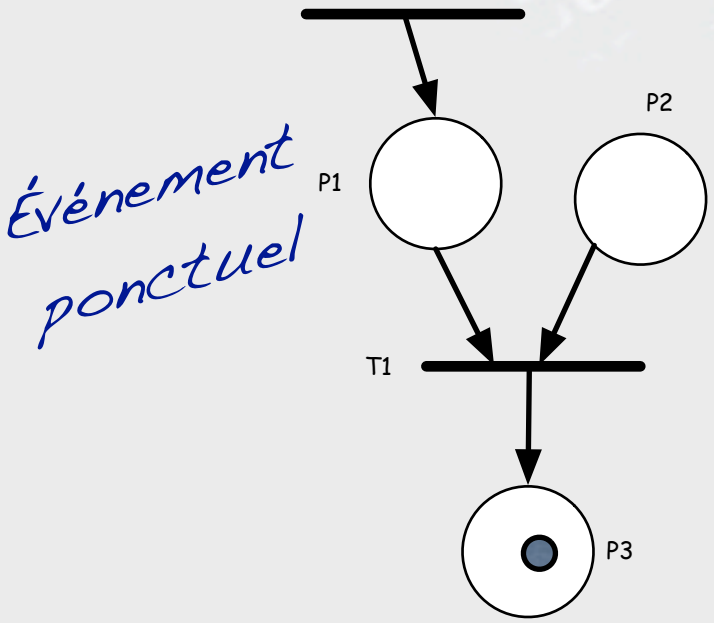


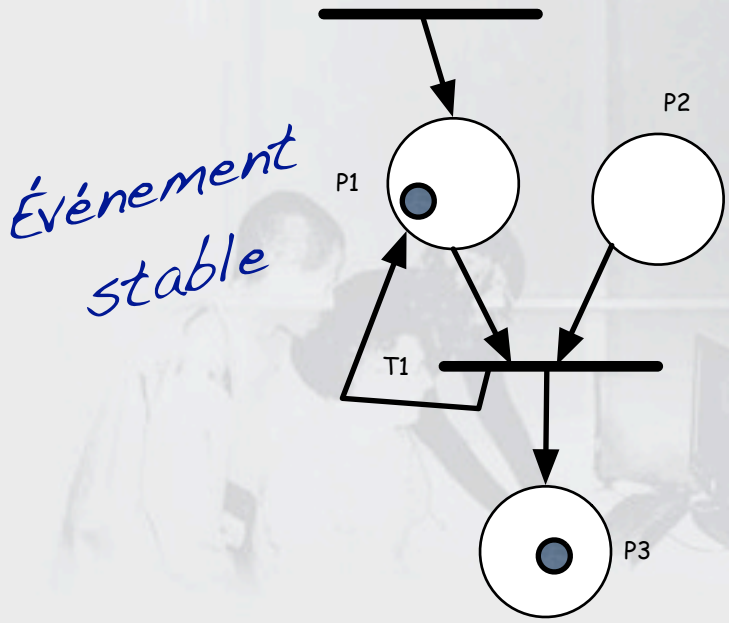


E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Point de vue des places
  - lieux de stockage des conditions de déclenchement, des signaux, des disponibilités de ressource
- Point de vue des jetons
  - signaux, événements, ressources

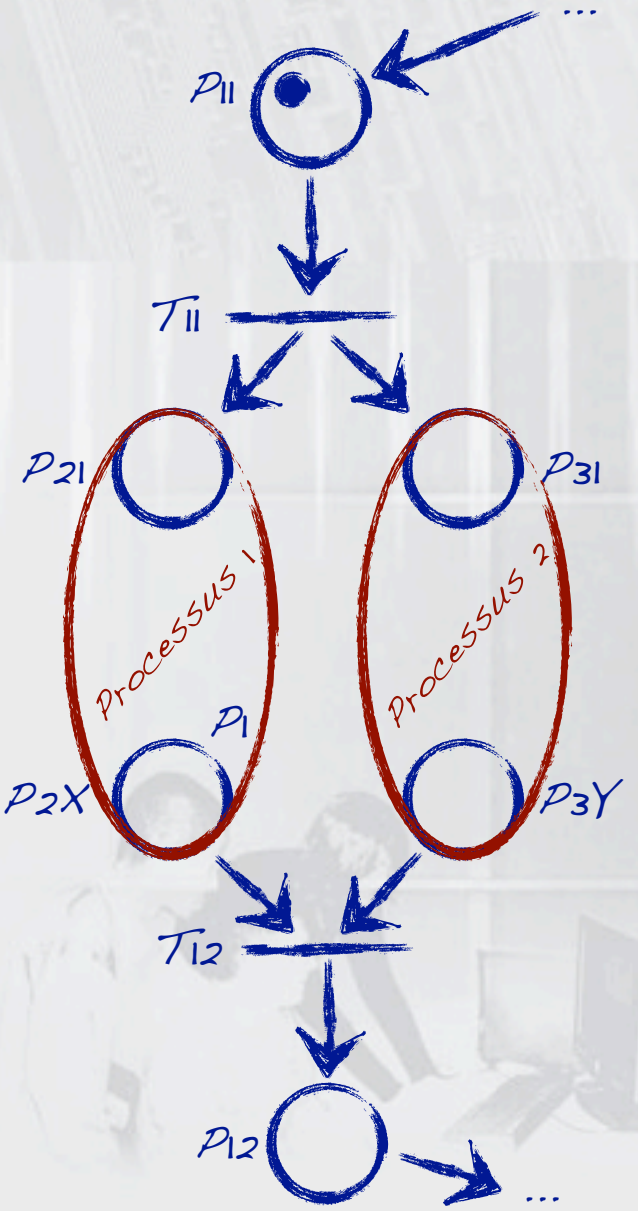




BY NC ND
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

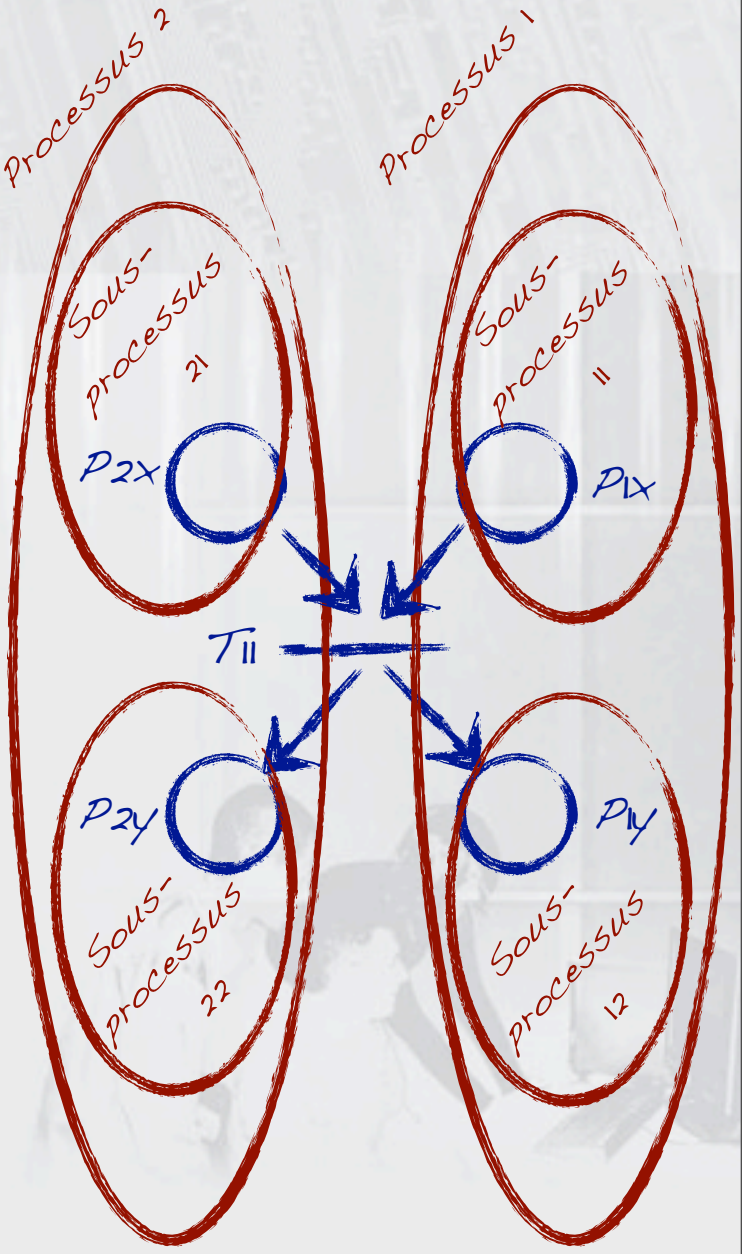
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



BY NC ND
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

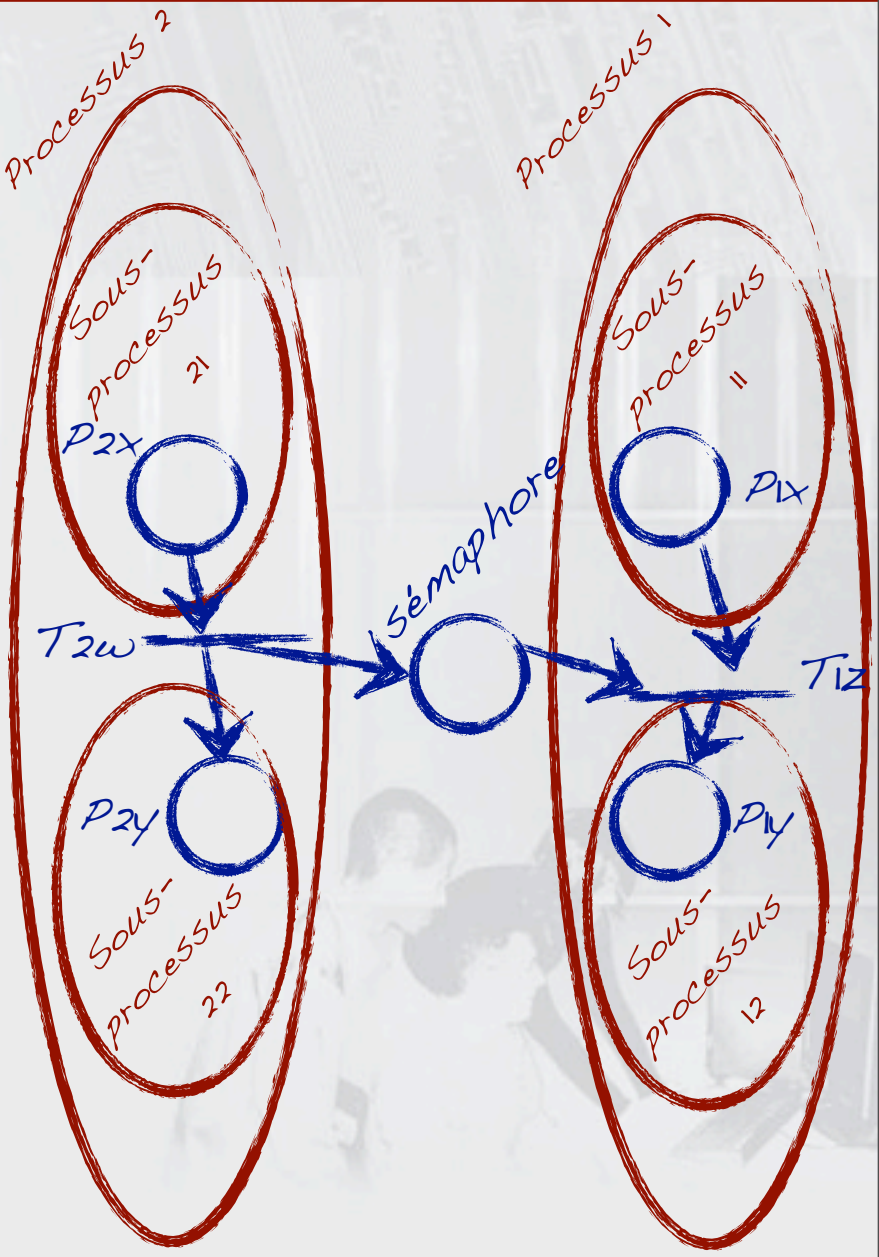
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

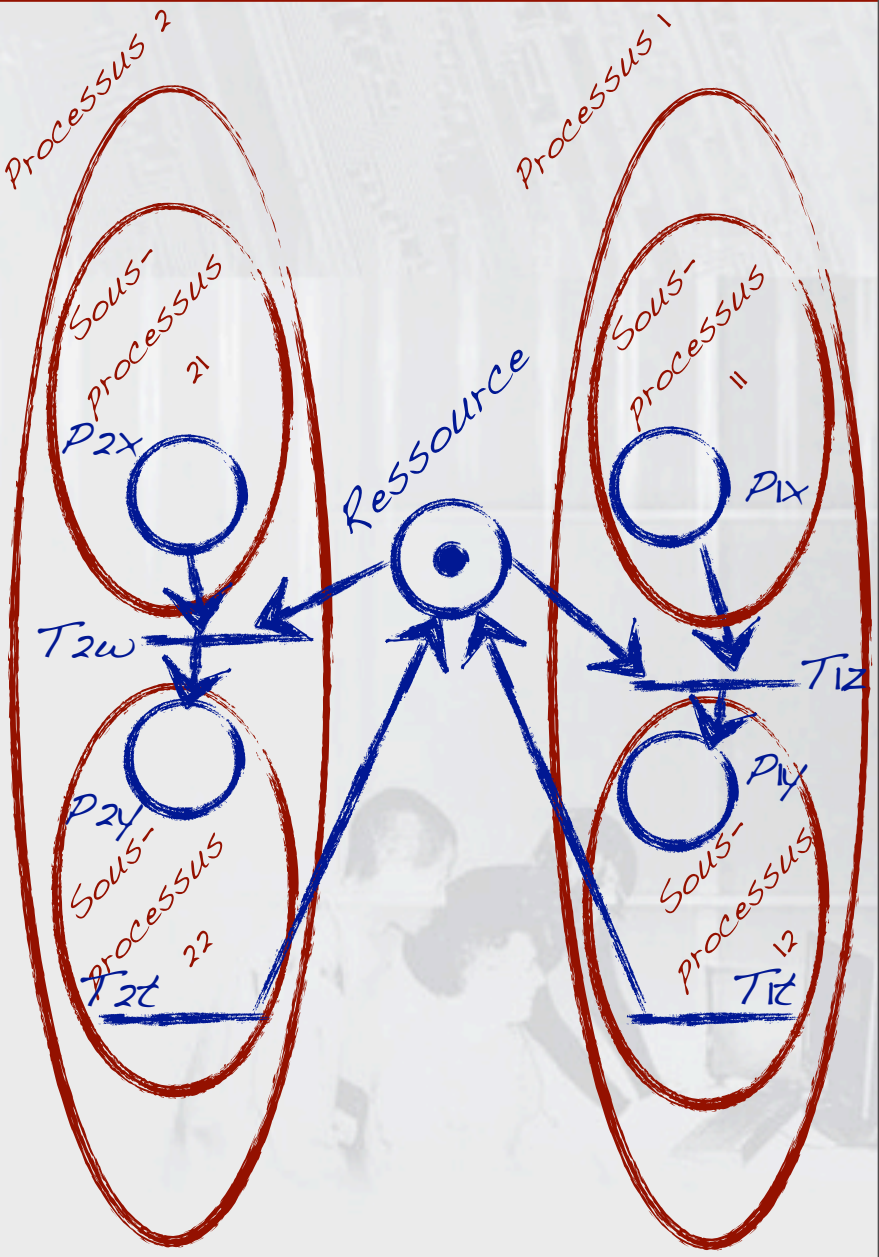
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

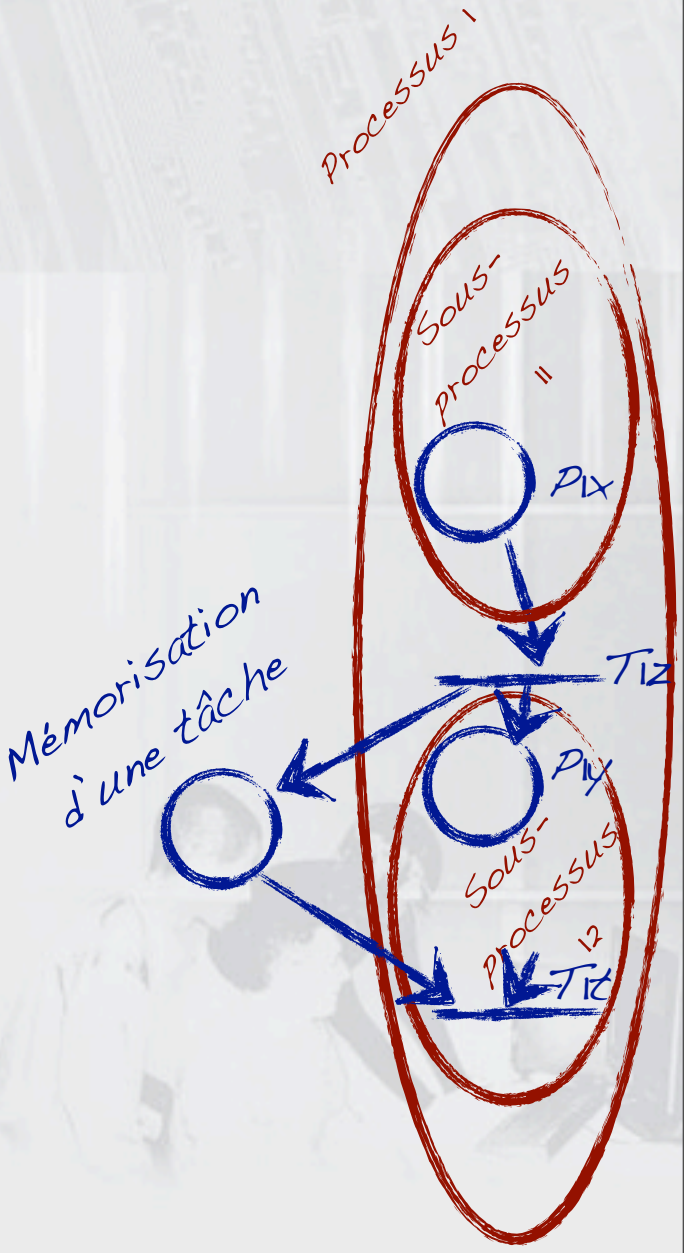
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



BY NC ND
E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

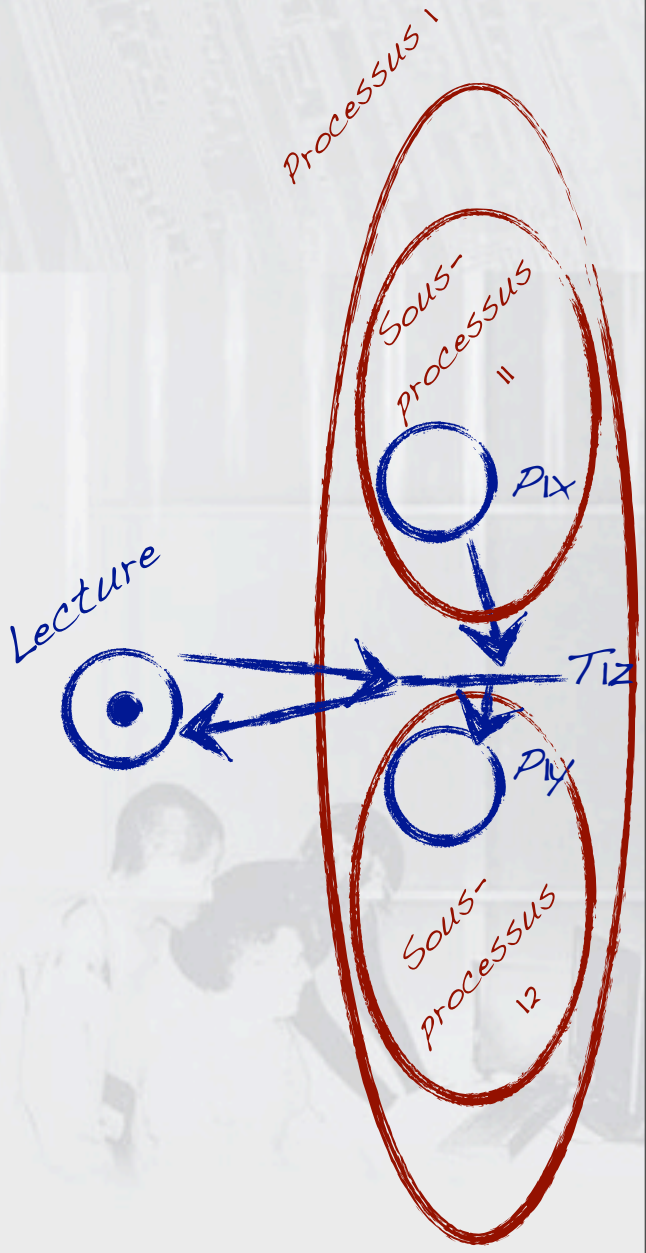
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

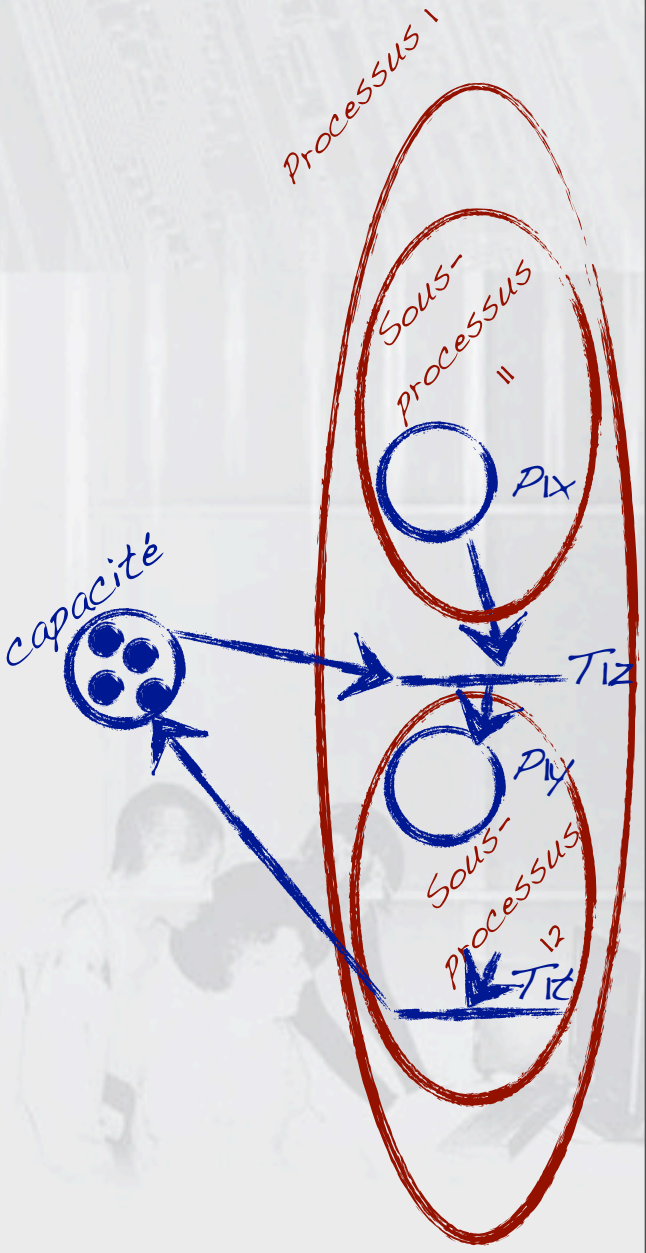
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

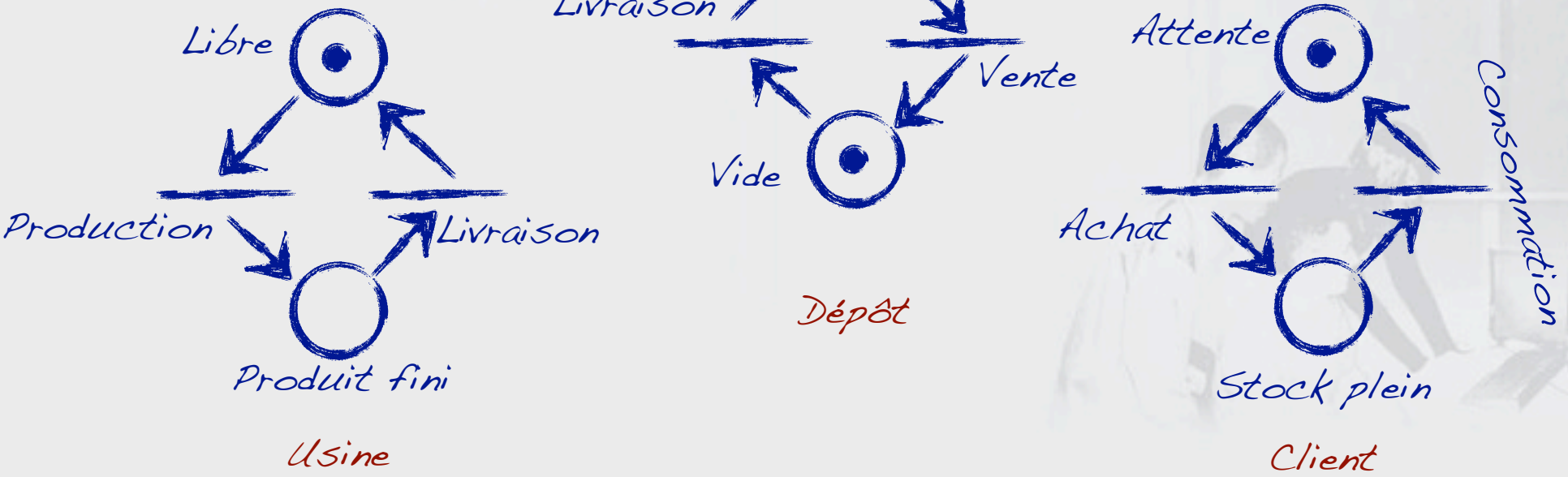
- Modélisation de comportements
  - Parallélisme
  - Synchronisation
  - Partage de ressources
  - Mémorisation/Lecture d'informations
  - Limitation d'une capacité de stockage
- Schémas caractéristiques



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

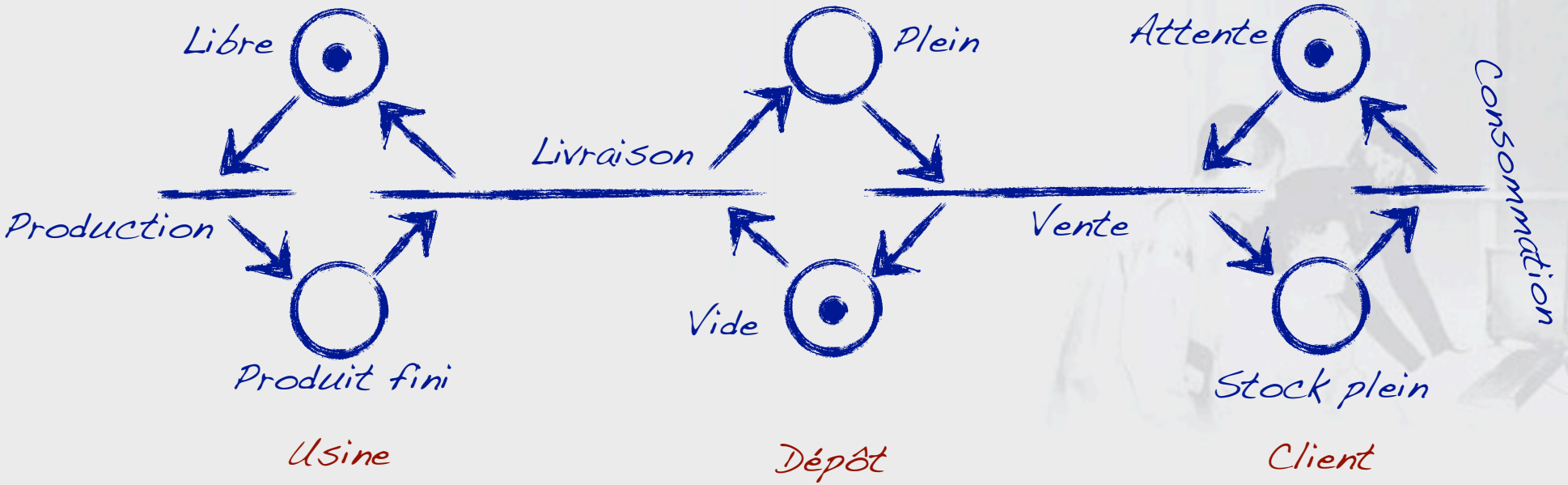
- Méthode de construction
  - par raffinement
  - par composition
    - fusion de transitions
    - fusion de places



E. Desmontils

Modélisation à l'aide des RdP

- Méthode de construction
  - par raffinement
  - par composition
    - fusion de transitions
    - fusion de places



E. Desmontils

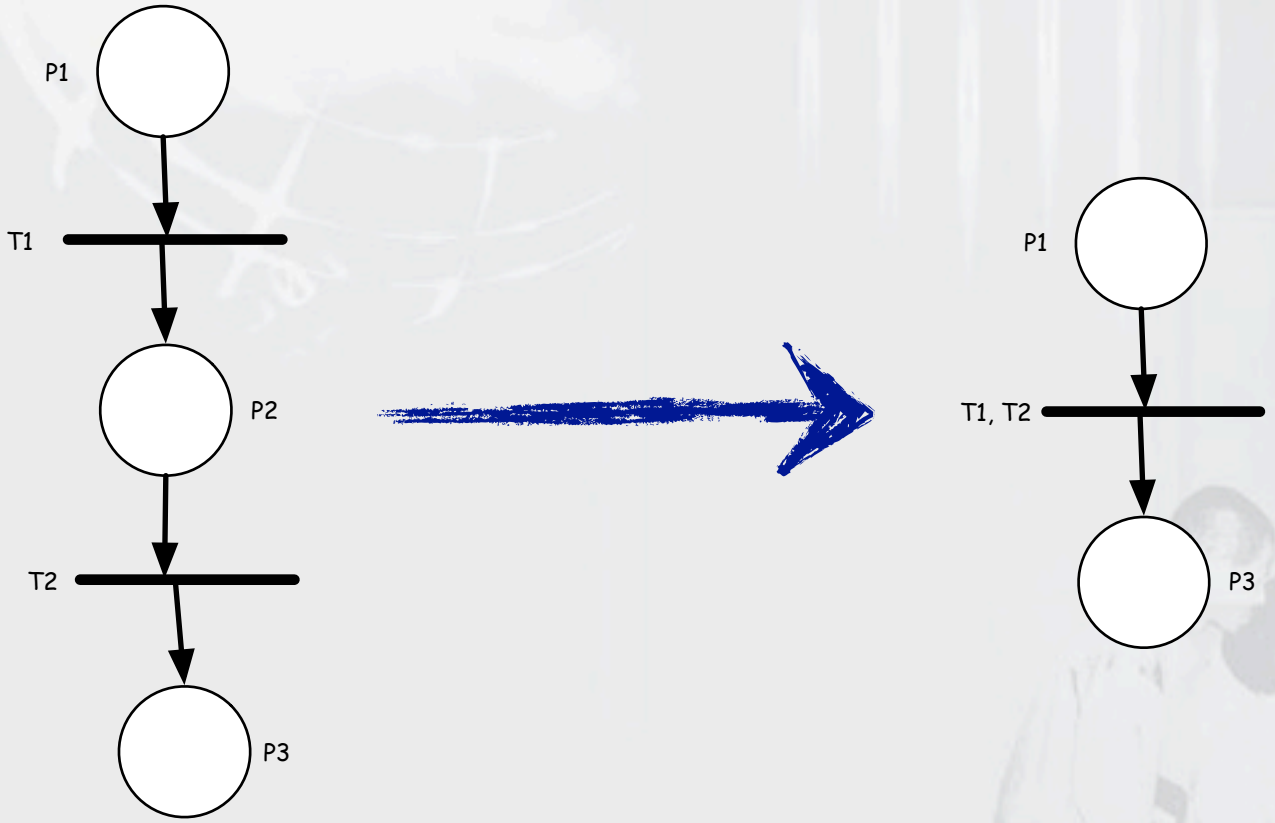
Difficultés de modélisation avec les RdP

- Attention !
  - jeton = «variable logique»
    - Vrai/Faux
    - Absent/Présent
  - ce n'est pas une information, mais plutôt une détection
  - les jetons sont indifférenciés

E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

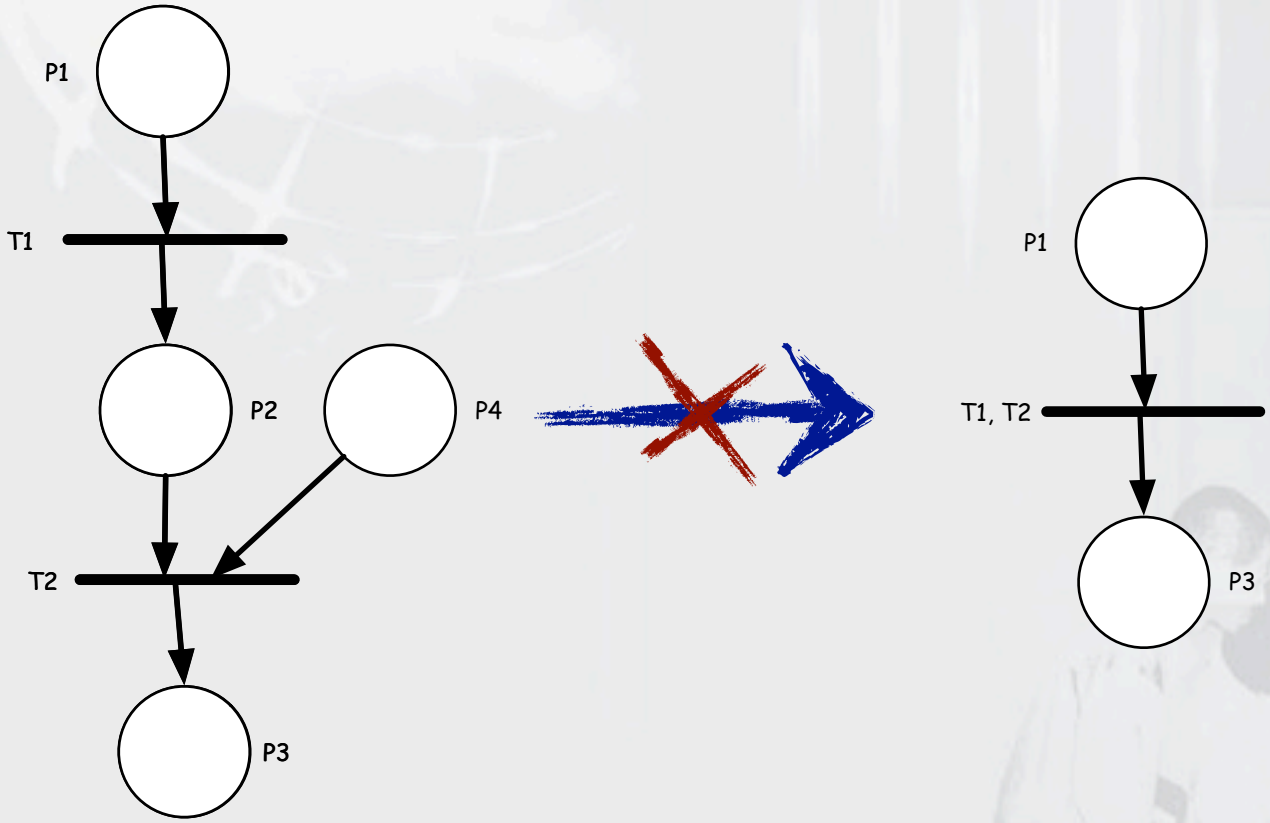
- Attention aux simplifications !



E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Attention aux simplifications !

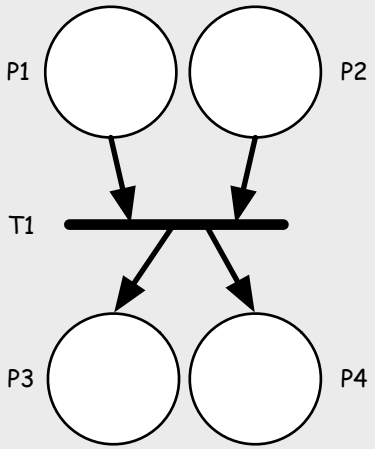


E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Identifier clairement le niveau de modélisation
  - Système global ?
  - Composants du système ?
- S'y tenir

- Attention à la production sélective de jetons



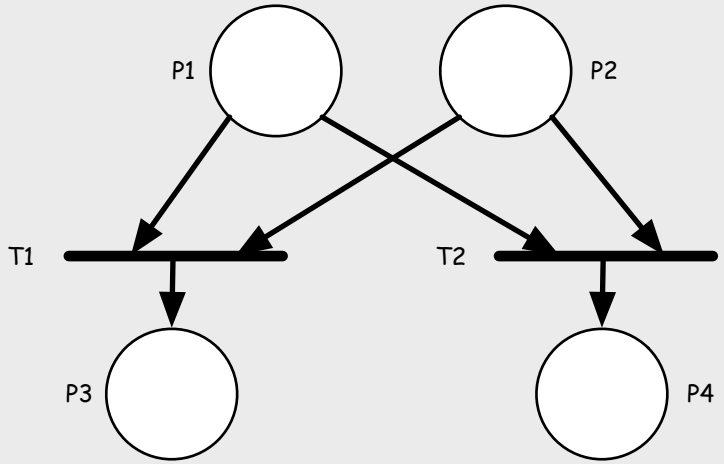
P3 et P4 sont systématiquement alimentés ! Il n'est pas possible de modéliser « j'alimente P3 ou P4 »

E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Identifier clairement le niveau de modélisation
  - Système global ?
  - Composants du système ?
- S'y tenir

- Attention à la production sélective de jetons

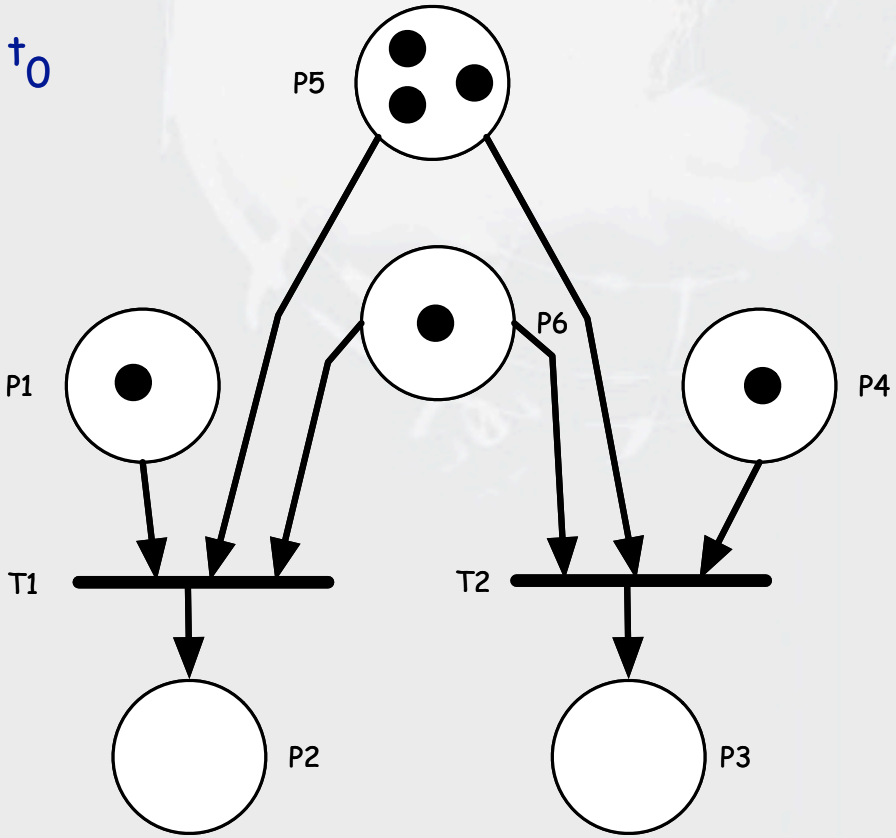


Ici « j'alimente P3 ou P4 », mais je ne contrôle pas les conditions

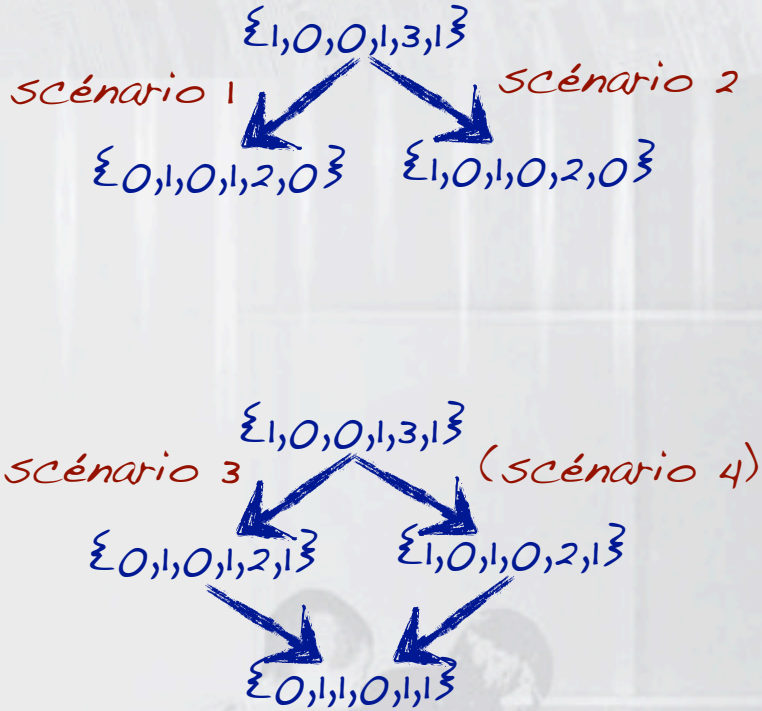
E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



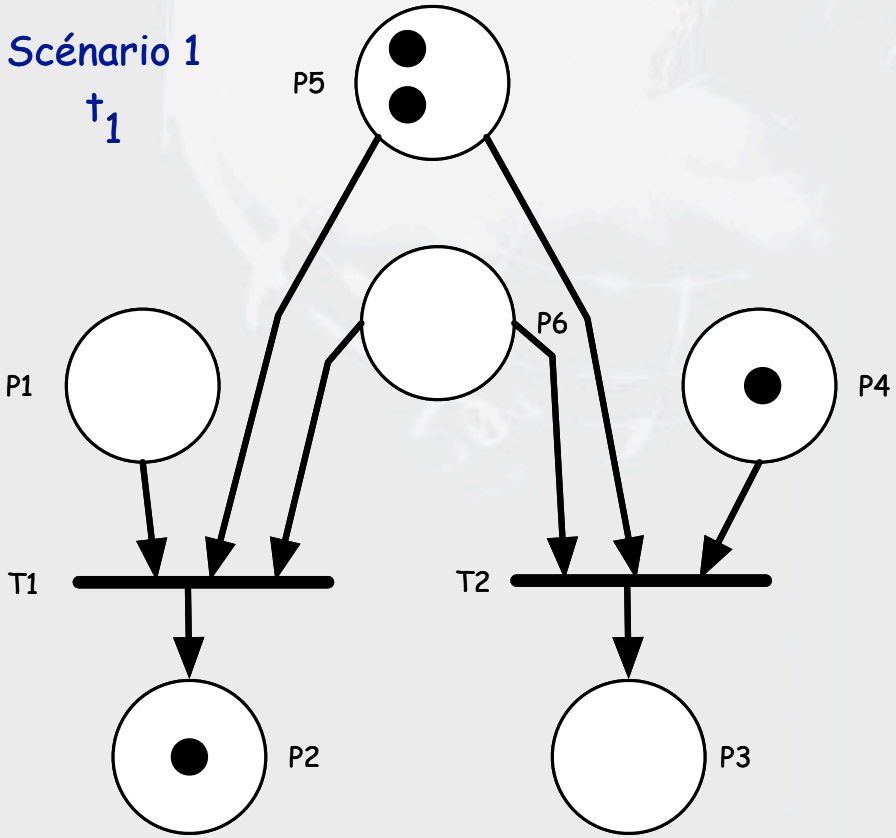
$M_0 = \{1,0,0,1,3,1\}$



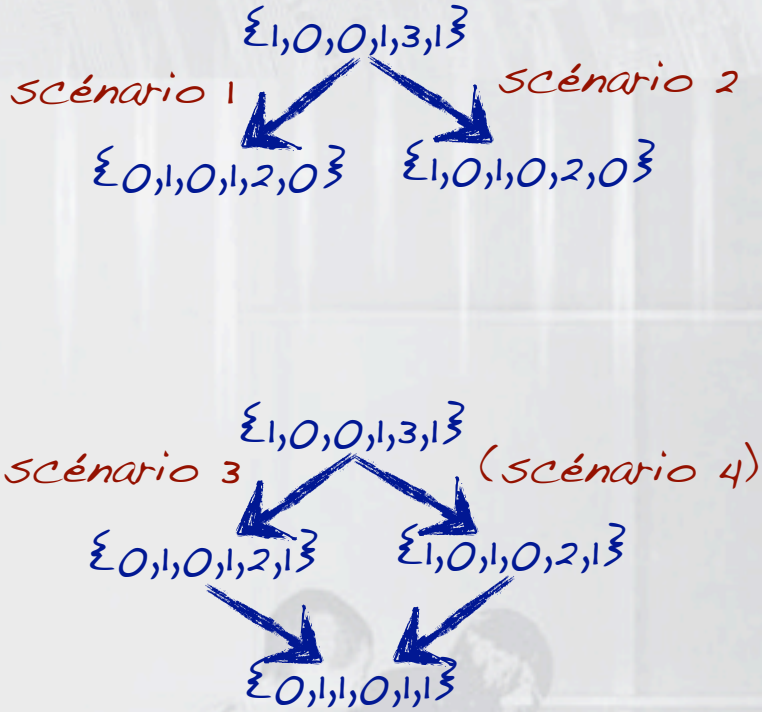
E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



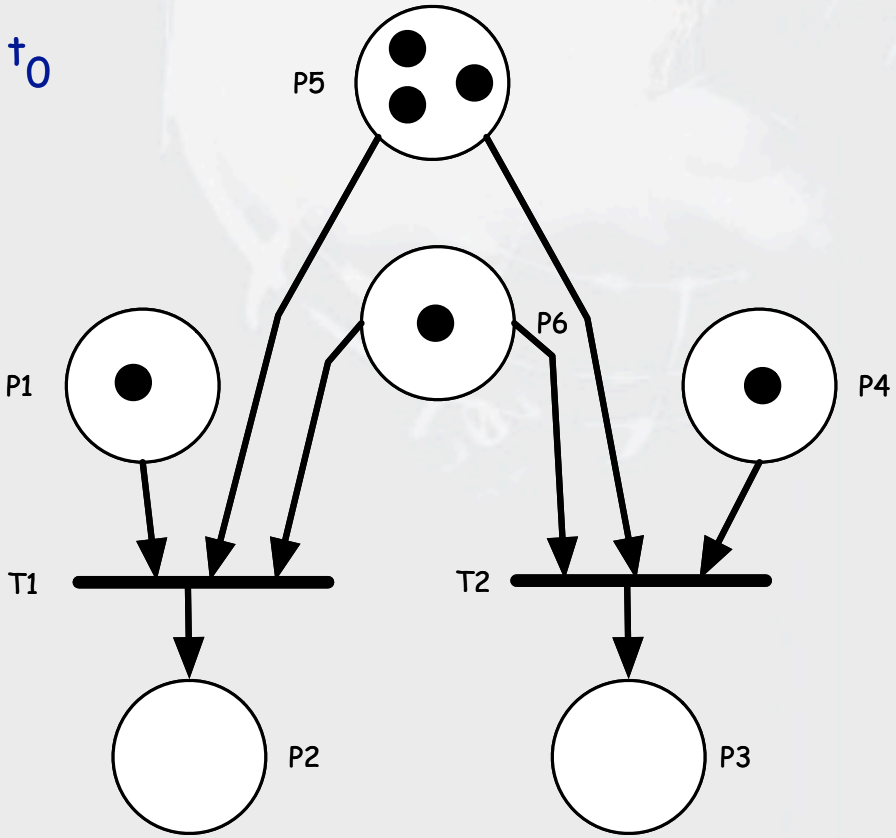
$M_1 = \{0,1,0,1,2,0\}$



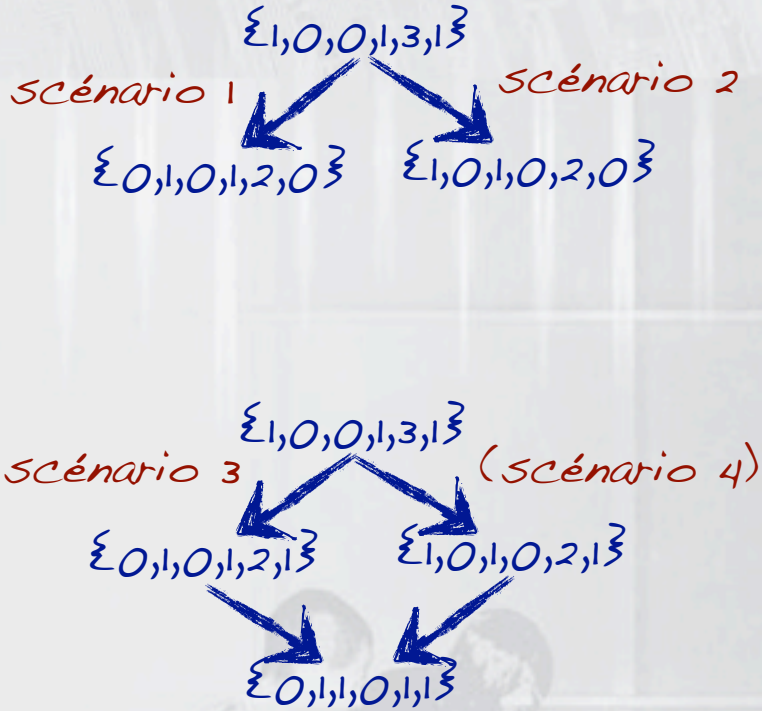
E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



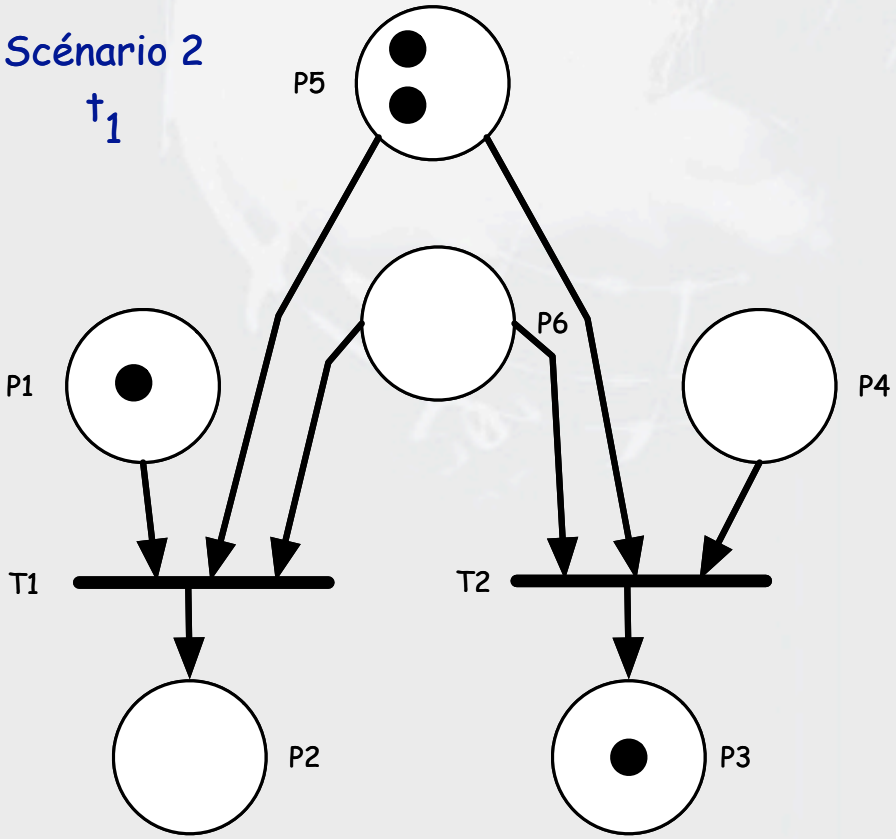
$M_0 = \{1,0,0,1,3,1\}$



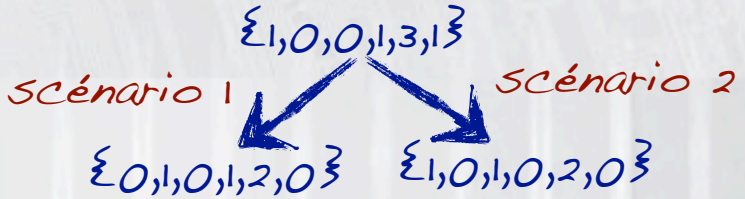
E. Desmontils

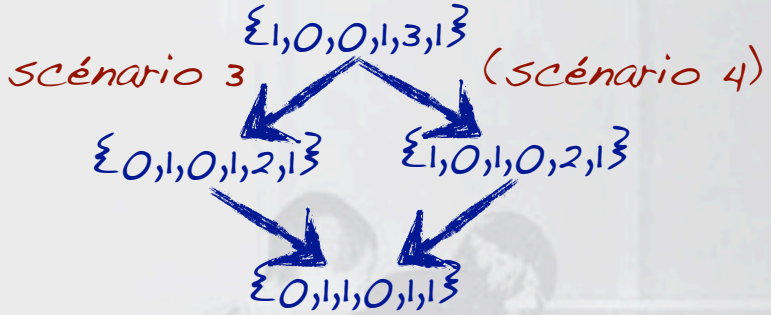
Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



$M_1 = \{1,0,1,0,2,0\}$

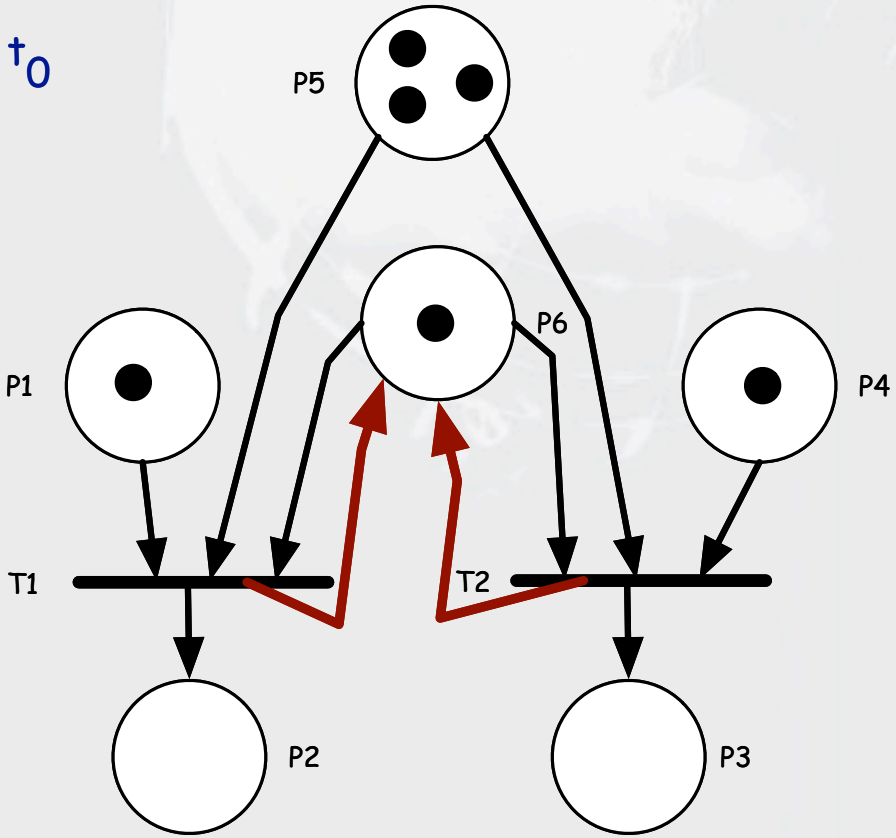




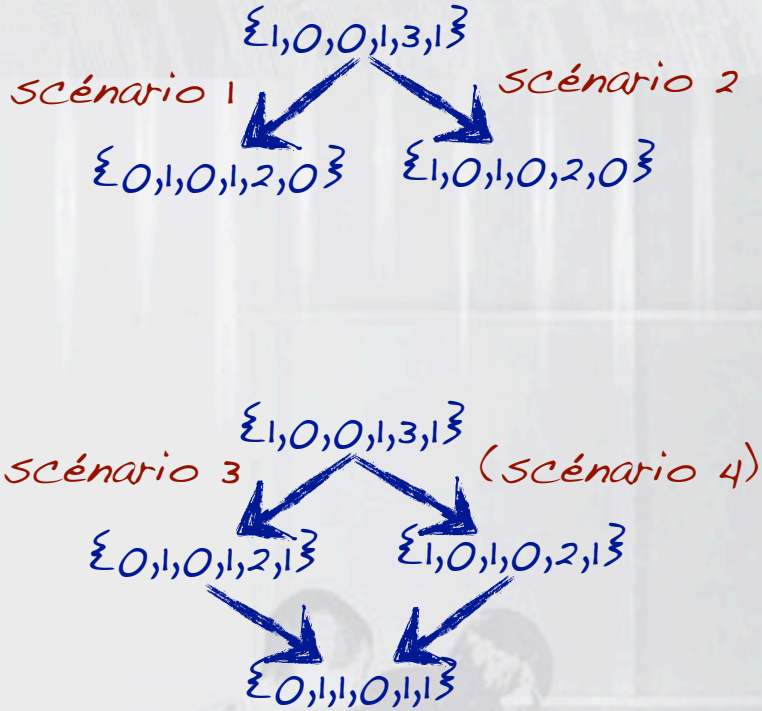
E. Desmontils

Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



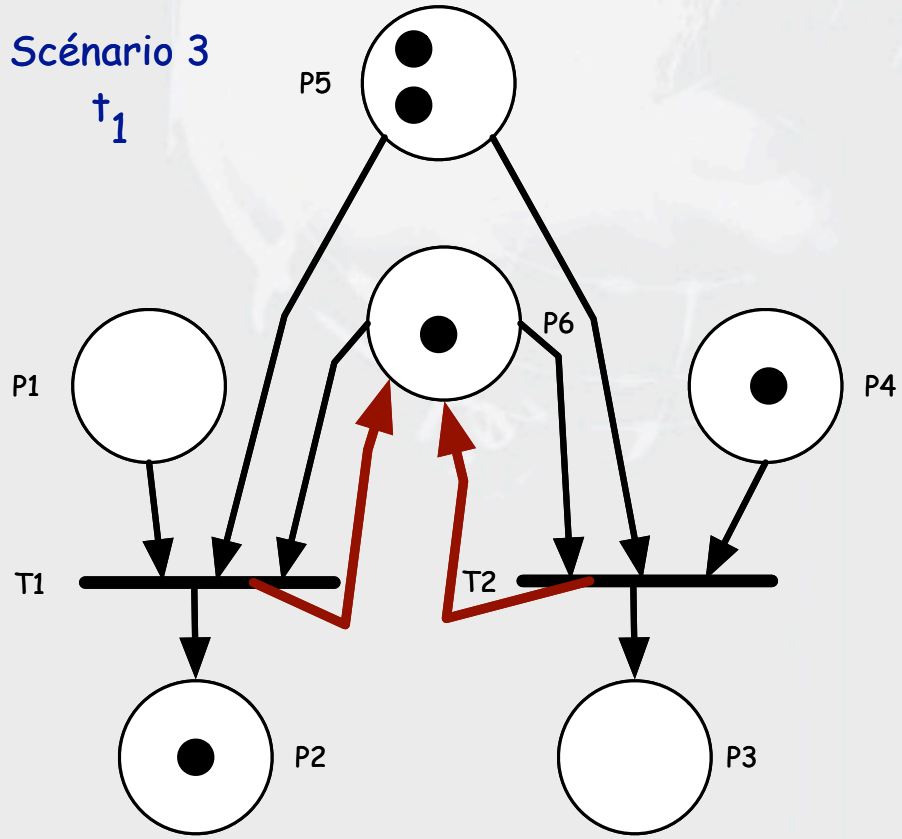
$M_0 = \{1,0,0,1,3,1\}$



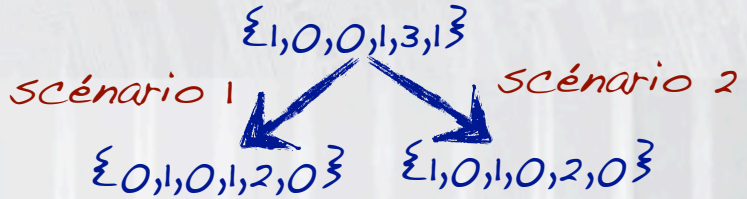
E. Desmontils

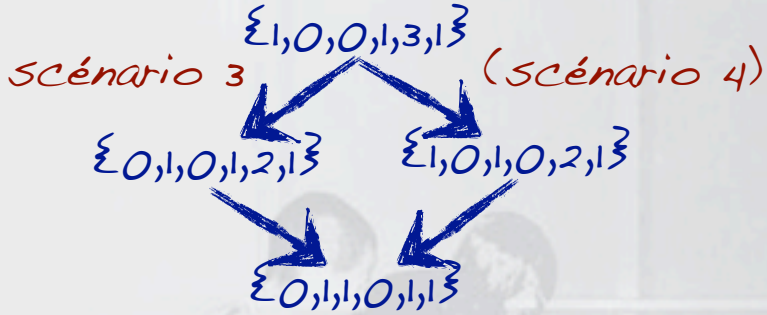
Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



$M_1 = \{0,1,0,1,2,1\}$

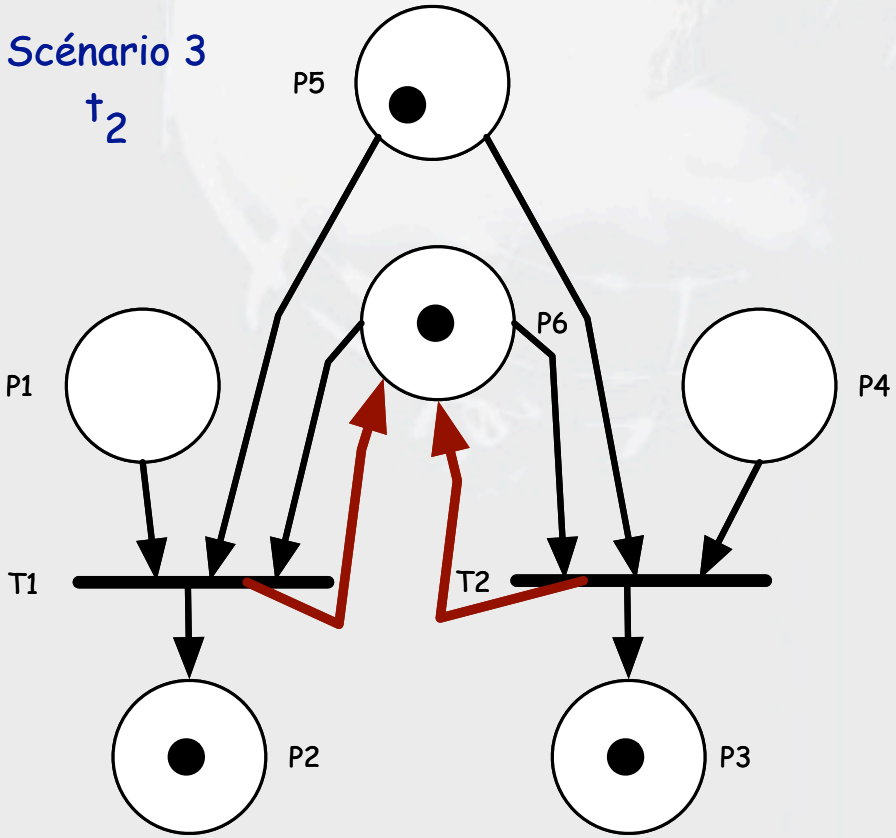




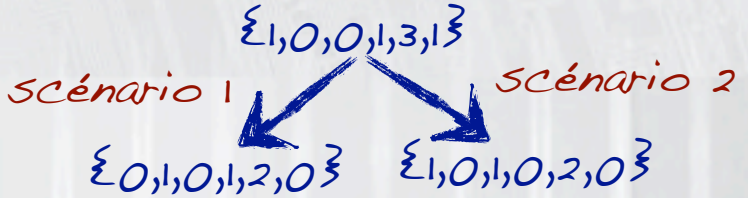
E. Desmontils

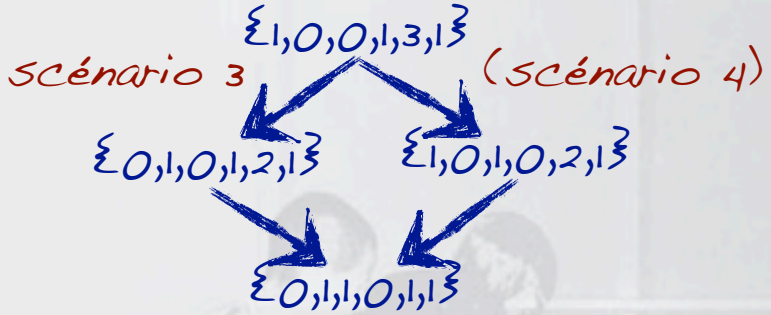
Difficultés de modélisation avec les RdP

- Ré-amorcer les places ?



$M_2 = \{0,1,1,0,1,1\}$





E. Desmontils

Notions complémentaires

- Réseau élémentaire : $W : A \rightarrow \{0,1\}$
- Circuit élémentaire :
  - circuit dans le graphe associé au réseau
    - retour à la place initiale sans passer 2 fois par la même place
- Boucle : $\exists\ p \in P, t \in T : (p,t) \in A \wedge (t,p) \in A$
- Réseau pur : réseau ne contenant pas de boucle

E. Desmontils

Vérification de propriétés

- Vérifier certaines caractéristiques comme :
  - existe-t-il un blocage ?
  - puis-je atteindre cette configuration ?
  - etc.

- Nécessité de mettre en place un formalisme et de s'appuyer sur les propriétés structurelles
  - formalisme

    -> définition formelle des RdP : {P, T, A, W, M_0}

E. Desmontils

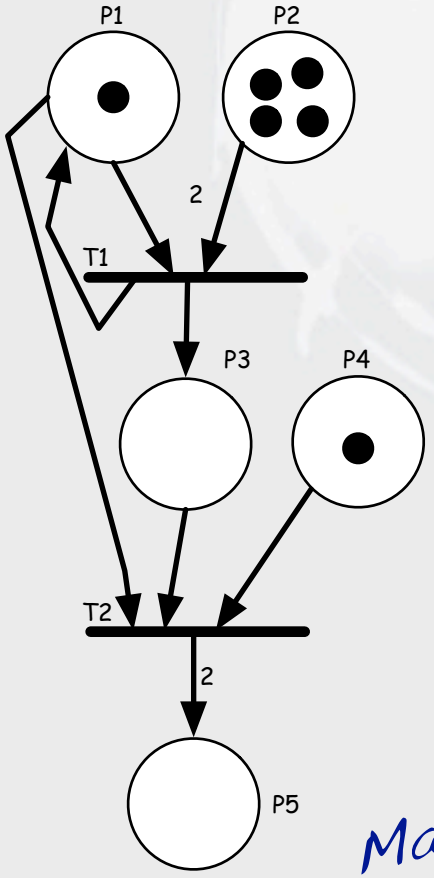
Matrices d'incidences

$r = \{P, T, A, W, M_0\}$

- Représentation du réseau par 2 matrices
  - lignes : places du réseau
  - colonnes : transitions du réseau
  - intersection : effet sur le réseau de la transition sur la place (en fonction du poids des arcs)
- U^+ : matrice d'incidence sortante
  - production
  - W(a) si $a \in T \times P \subseteq A$, 0 sinon
- U^- : matrice d'incidence entrante
  - consommation
  - W(a) si $a \in P \times T \subseteq A$, 0 sinon
- U : matrice d'incidence du RdP = $U^+ - U^-$

E. Desmontils

Matrices d'incidences



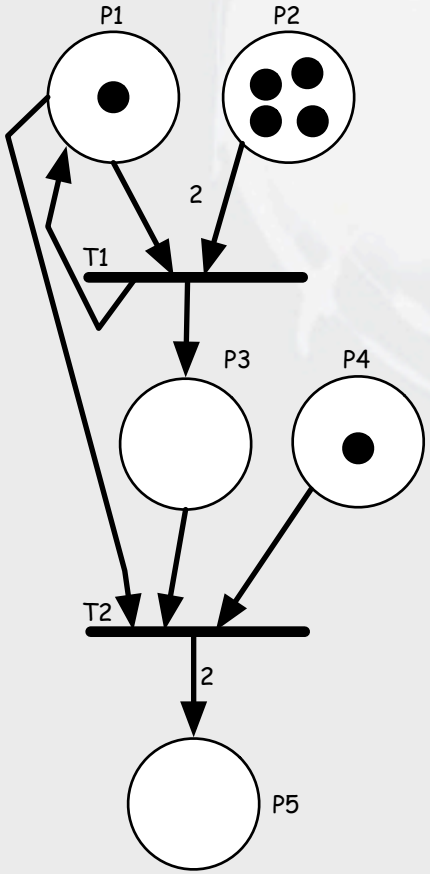
$$U^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = U^+ - U^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices qui décrivent seulement la structure du RdP... il manque le marquage initial !

E. Desmontils

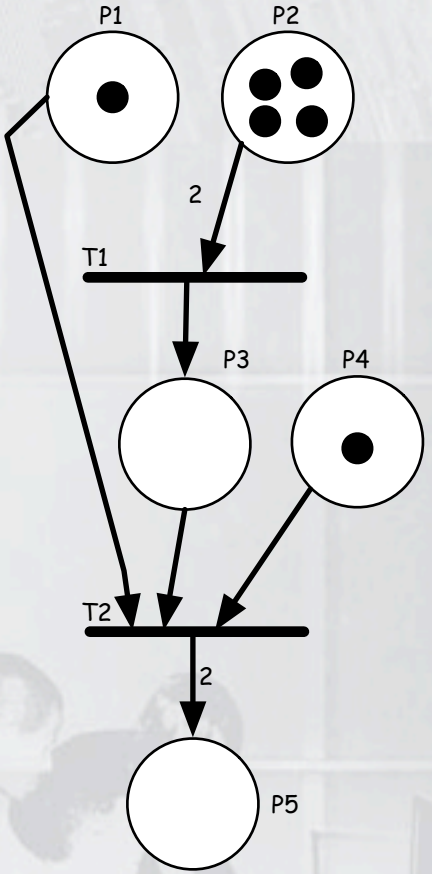
Matrices d'incidences



$$U = U^+ - U^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice d'incidence ne met pas en évidence les boucles !

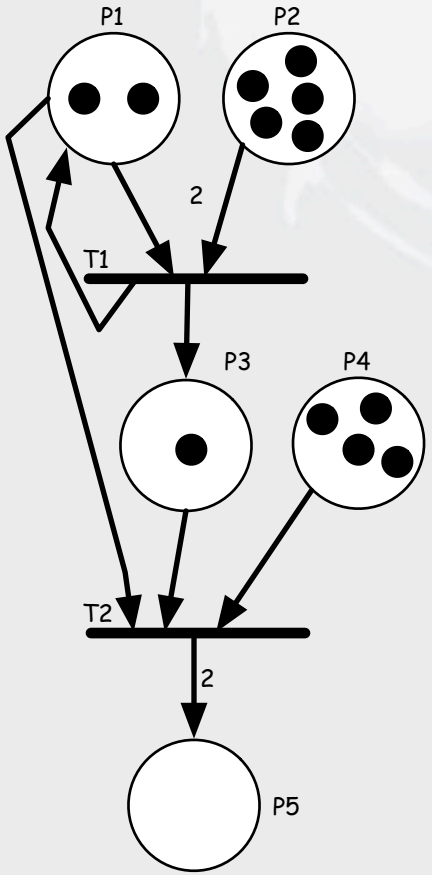
U^+ et U^- sont donc indispensables !

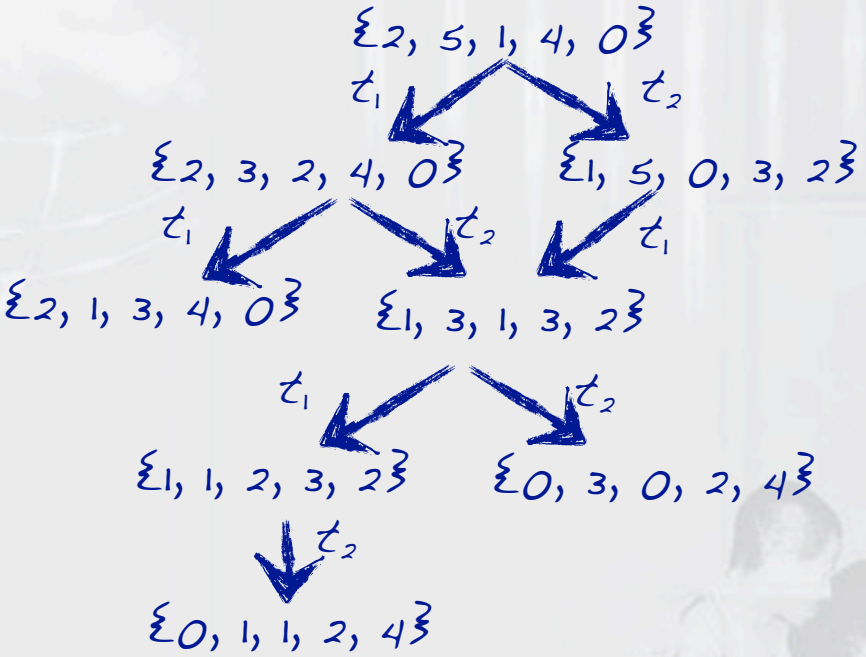


E. Desmontils

Séquence de franchissement

- **Séquence de franchissement**
  = chemin dans le graphe de marquages



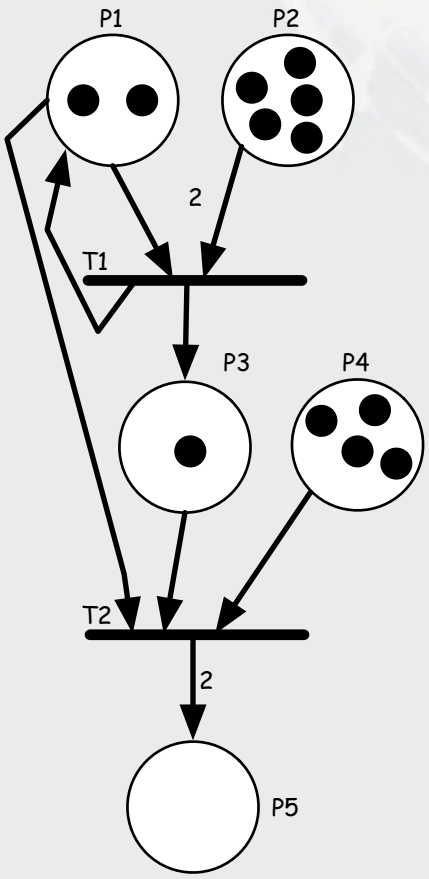


Exemple de séquence : $\langle t_1, t_2, t_1, t_2 \rangle$

E. Desmontils

Vecteur de comptage

- Vecteur de comptage d'une séquence de franchissement = pour chaque transition, le nombre de fois où elle est prise



Exemple de séquence : $\langle t_1, t_2, t_1, t_2 \rangle$
Vecteur de comptage : $\langle 2, 2 \rangle$

Exemple de séquence : $\langle t_2\ t_1, t_1, t_2 \rangle$
Vecteur de comptage : $\langle 2, 2 \rangle$

Attention, à un vecteur de comptage correspondent plusieurs séquences (valides ou pas) !
Par exemple $\langle t_2\ t_2, t_1, t_1 \rangle$...

E. Desmontils

Équation d'état

- Équation d'état : calcul de l'évolution du RdP
  - si toutes les cellules de M_i sont positives ou nulles, M_i est valide (il existe une séquence de i étapes permettant d'y arriver)

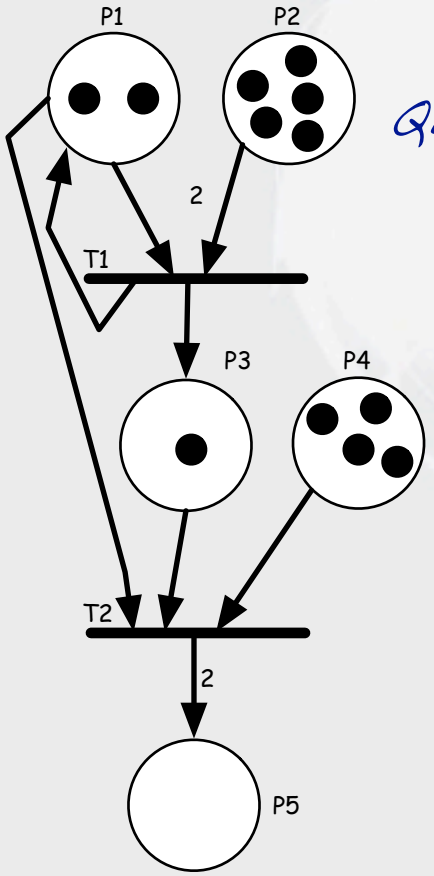
$$M_i^t = M_0^t + U.V_i^t$$

M^t : transposée de M
M_i : marquage après i transitions
U : matrice d'incidence
V_i : vecteur de comptage après i transitions

Attention, l'équation dit qu'avec ce vecteur, c'est possible. Il existe donc au moins une séquence qui permet d'y arriver... mais pas nécessairement toutes les séquences donnant ce vecteur.

E. Desmontils

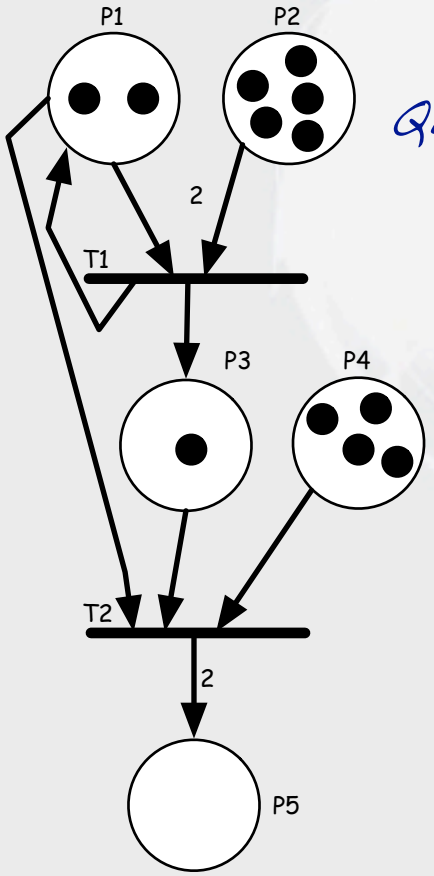
Exemple de calcul



Quelle est le marquage après avoir appliqué deux fois t_1 ?

E. Desmontils

Exemple de calcul

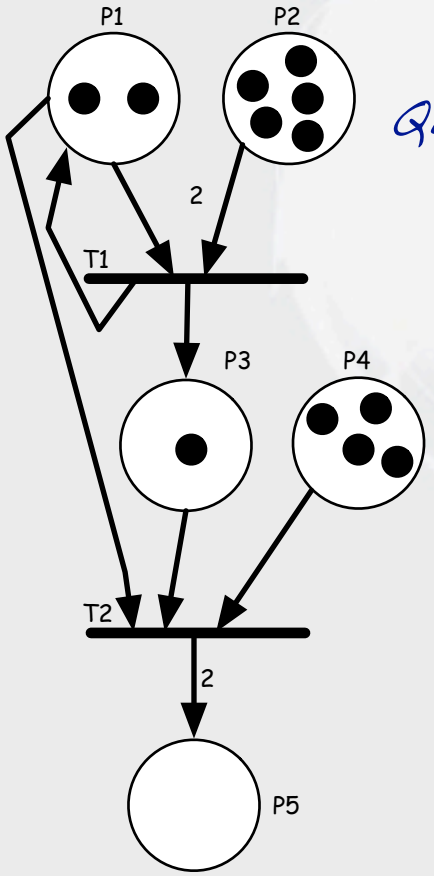


Quelle est le marquage après avoir appliqué deux fois t_1 ?

$$\begin{pmatrix}2\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\-2 & 0\\1 & -1\\0 & -1\\0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-4\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\\0\end{pmatrix}$$

E. Desmontils

Exemple de calcul



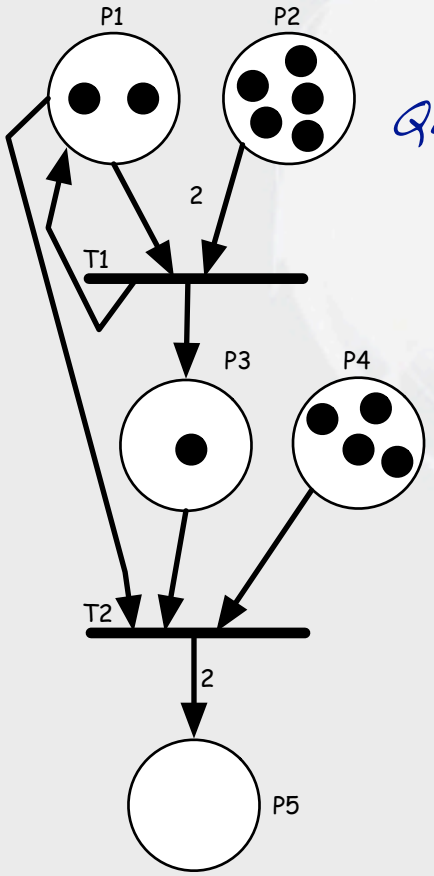
Quelle est le marquage après avoir appliqué deux fois t_1 ?

M_0^t U Comptage $(\langle t_1, t_1 \rangle)$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\-2 & 0\\1 & -1\\0 & -1\\0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-4\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\\0\end{pmatrix}$$

E. Desmontils

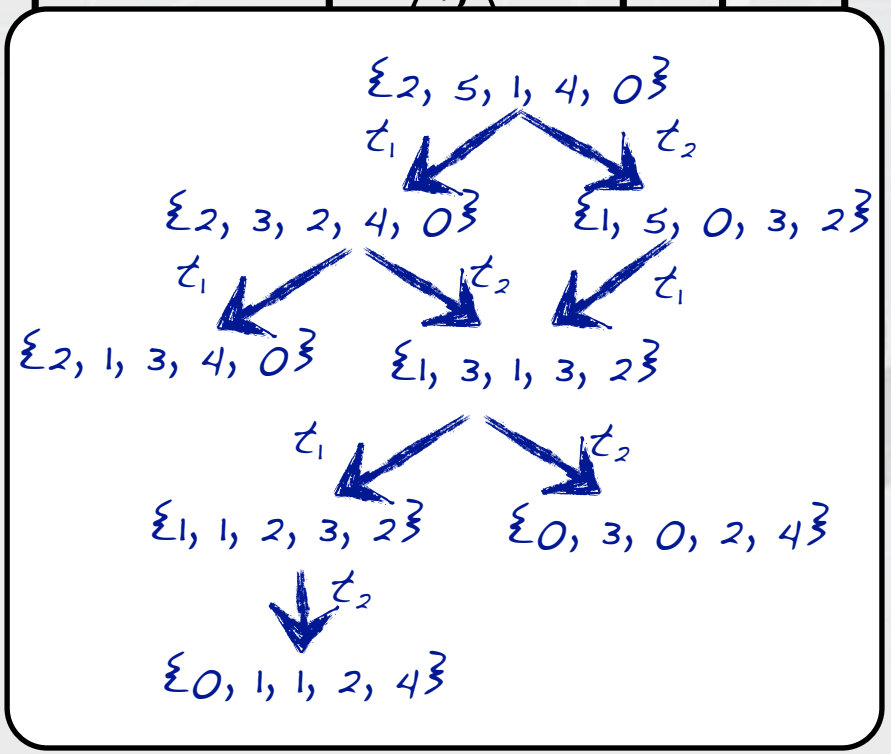
Exemple de calcul



Quelle est le marquage après avoir appliqué deux fois t_1 ?

M_0^t U Comptage $(\langle t_1, t_1 \rangle)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



E. Desmontils

Vérification de propriétés

- Soit R(M) : ens. des marquages qu'il est possible d'atteindre à partir du marquage M
- Transition vivante t :
  $\forall M \in R(M_0), \exists M' \in R(M)$ tq
  t est franchissable pour M'
- Si toutes les transitions sont vivantes : RdP vivant.
- S'il n'existe pas une transition vivante pour M', alors M' représente un blocage.
- Un réseau sans blocage = réseau vivant

E. Desmontils

Vérification de propriétés

- Place k-bornée : le nombre de jetons ne dépasse jamais k quelque soit le marquage atteignable à partir du marquage initial.
- Réseau k-borné : toutes les places sont k-bornées.
  - k=1 : réseau sain.
- Si le réseau est k-borné quelque soit le marquage initial : réseau structurellement borné.

E. Desmontils

Vérification de propriétés

- M_i est un marquage atteignable à partir du marquage initial M_0 si l'équation d'état

$$M_i^t = M_0^t + U.X^t$$

possède une solution.

- X est alors le vecteur de comptage de la séquence de franchissement séparant M_0 de M_i.

Attention, la séquence n'est pas forcément unique... mais il en existe au moins une !

E. Desmontils

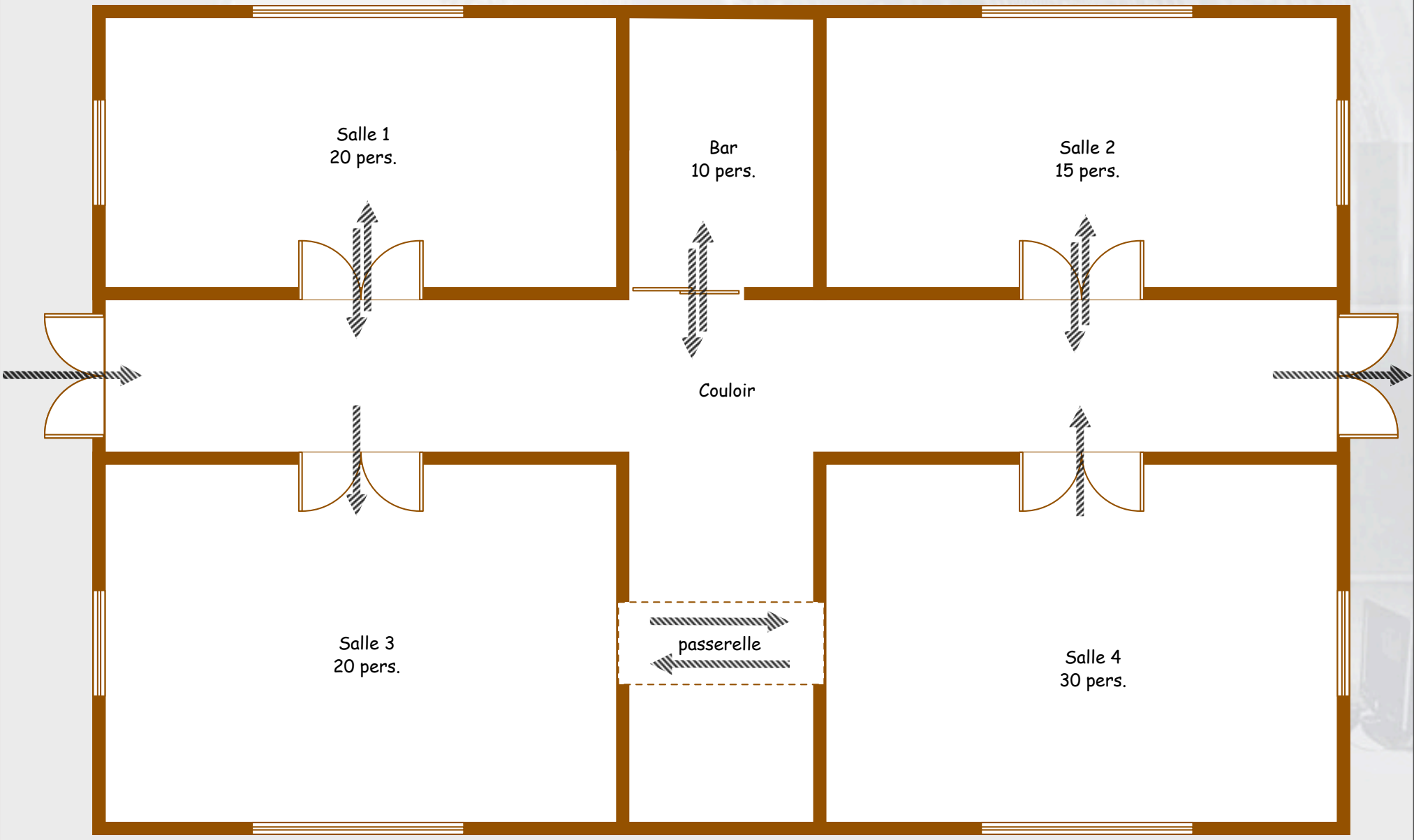
A propos de l'équation d'état

$$M_i^t = M_0^t + U.V_i^t \qquad M_i^t - U.V_i^t = M_0^t$$

- Utilisations possibles :
  - déterminer si un marquage est atteignable à partir d'une séquence de franchissement (toutes les valeurs de M_i sont positives ou nulles)
  - déterminer si une séquence est valide (pas à pas)
  - déterminer la ou les séquences permettant d'atteindre un marquage
  - déterminer si, à partir d'un marquage, une transition est franchissable
  - déterminer les marquages initiaux possibles pour arriver à un marquage donné

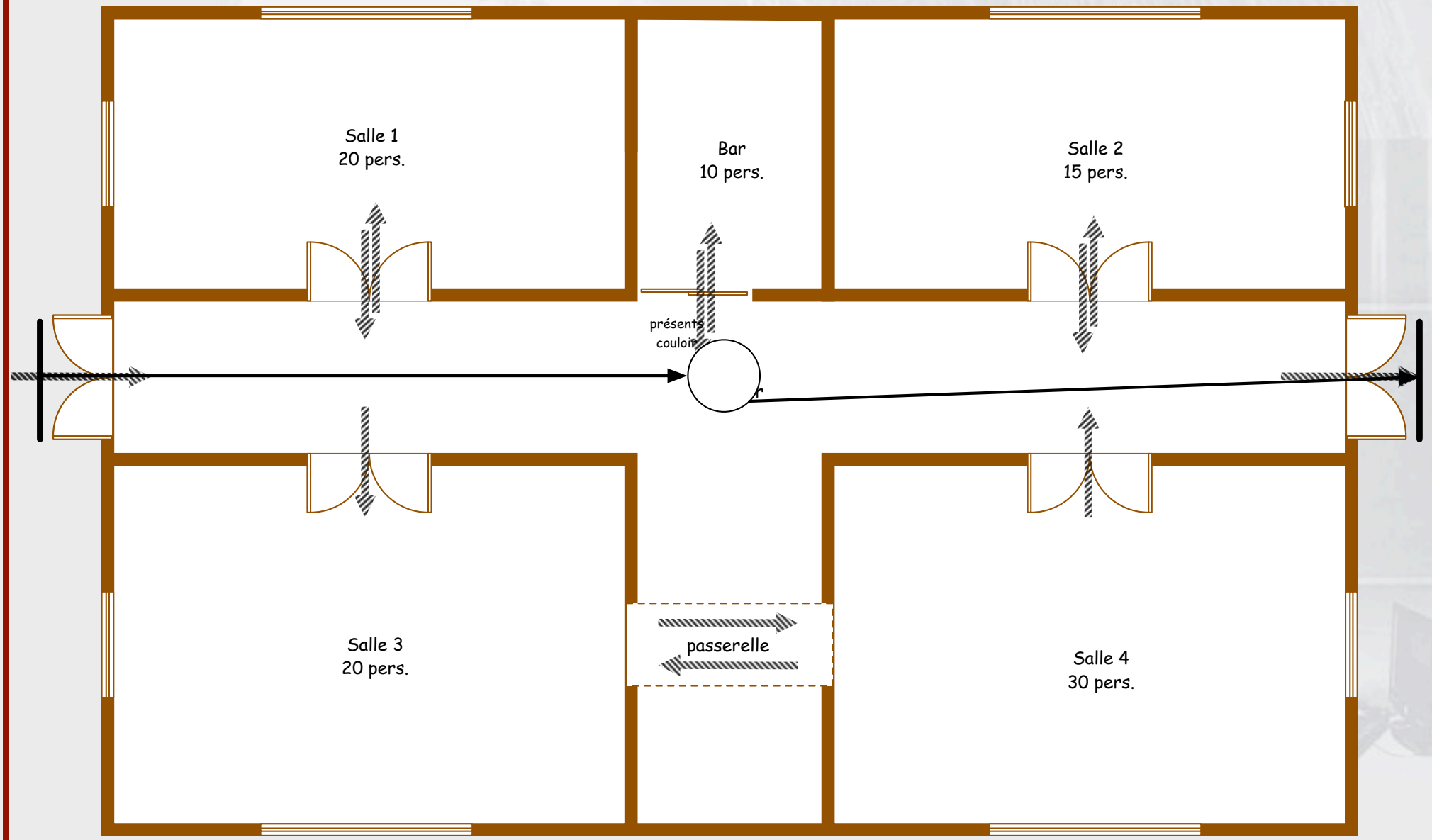
E. Desmontils

Exemple



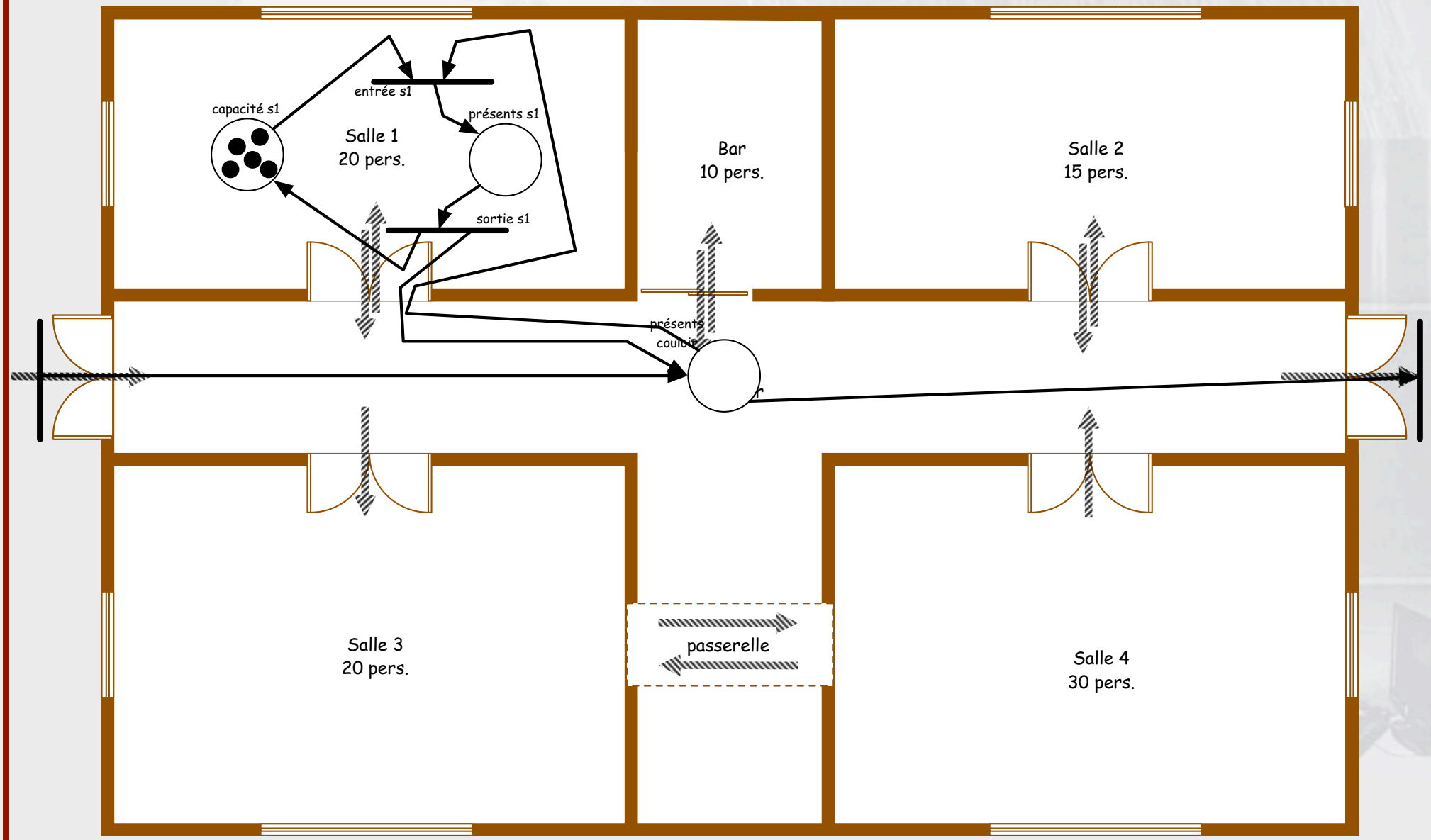
E. Desmontils

Exemple



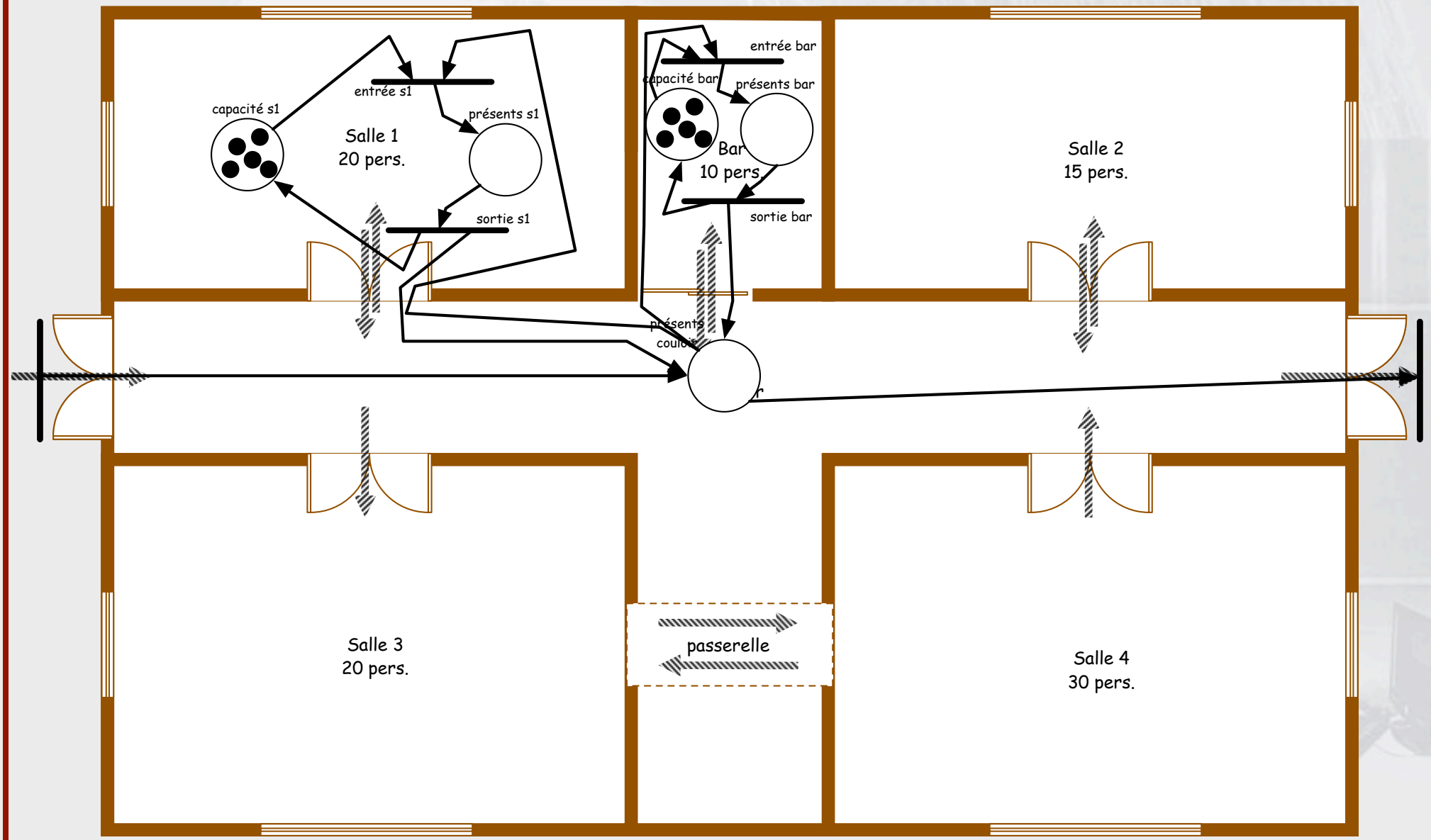
E. Desmontils

Exemple



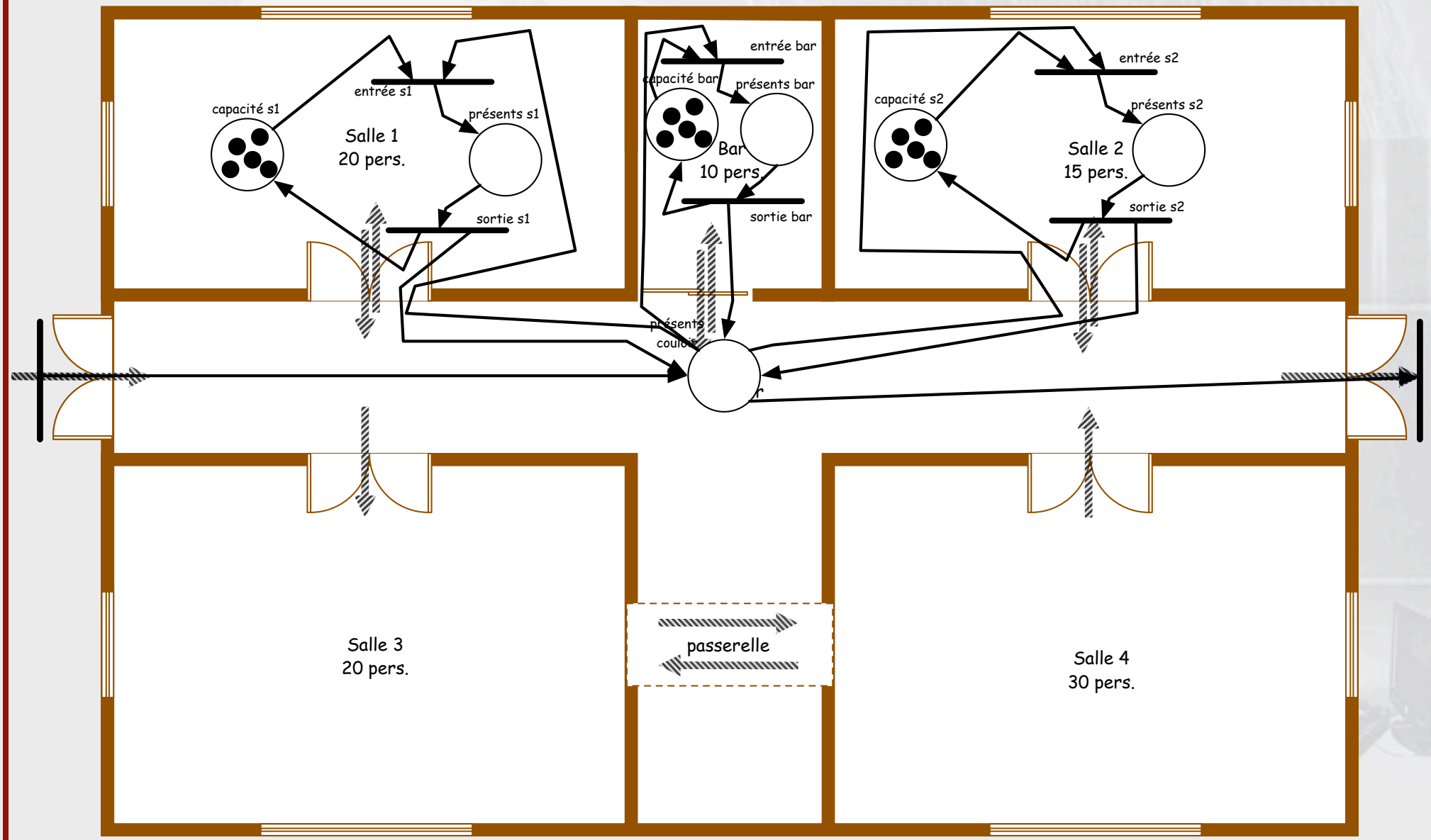
E. Desmontils

Exemple



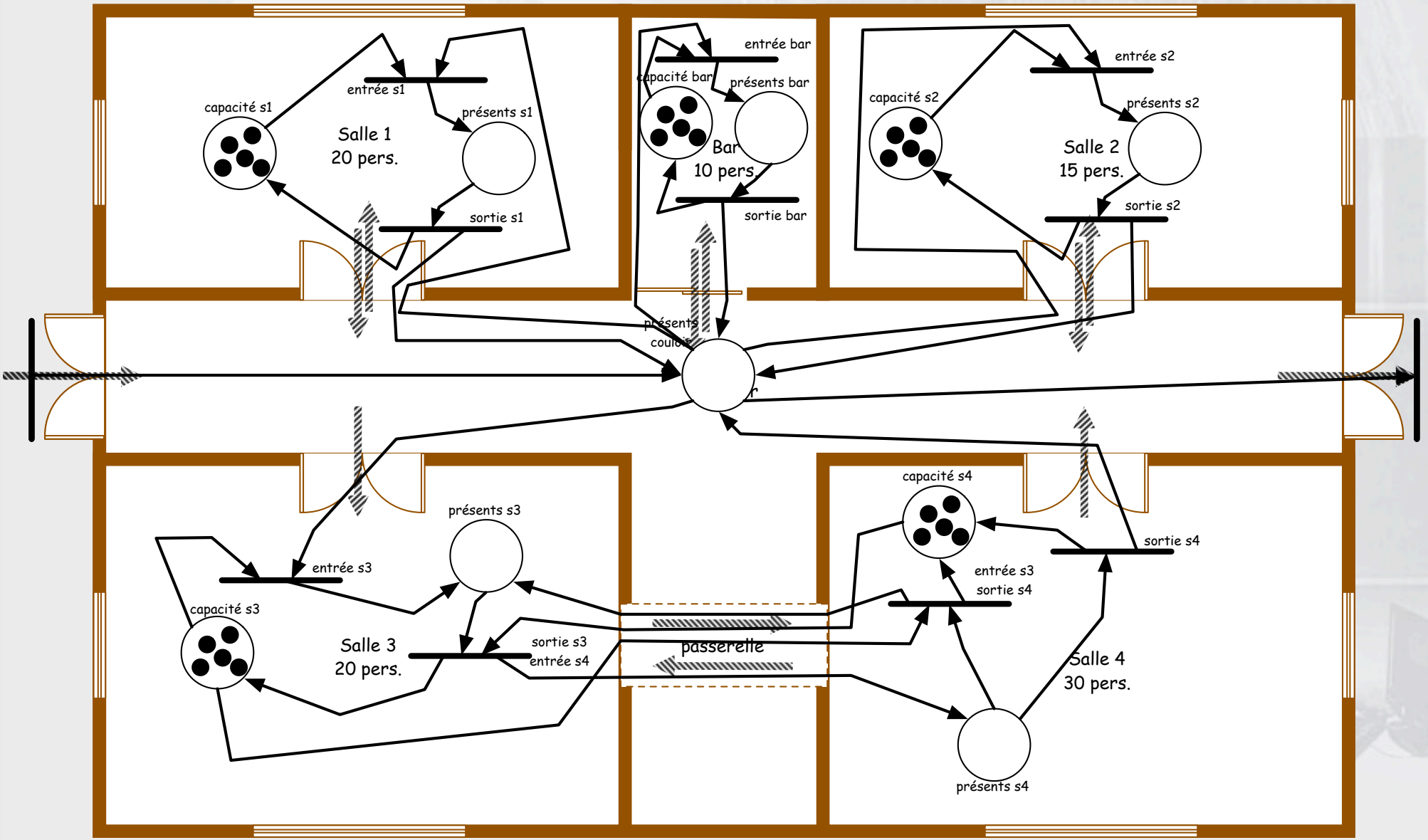
BY NC ND
E. Desmontils

Exemple



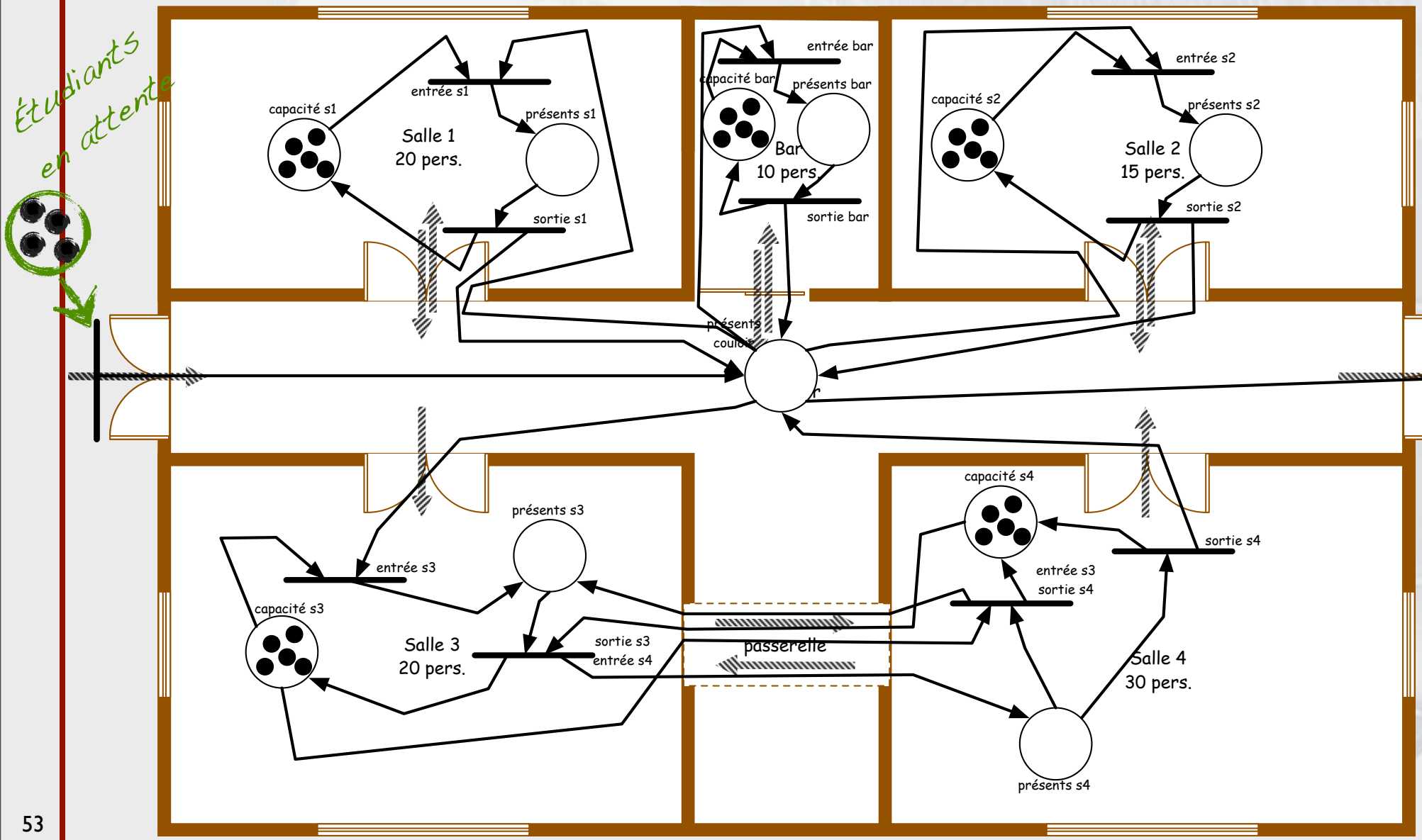
BY NC ND
E. Desmontils

Exemple



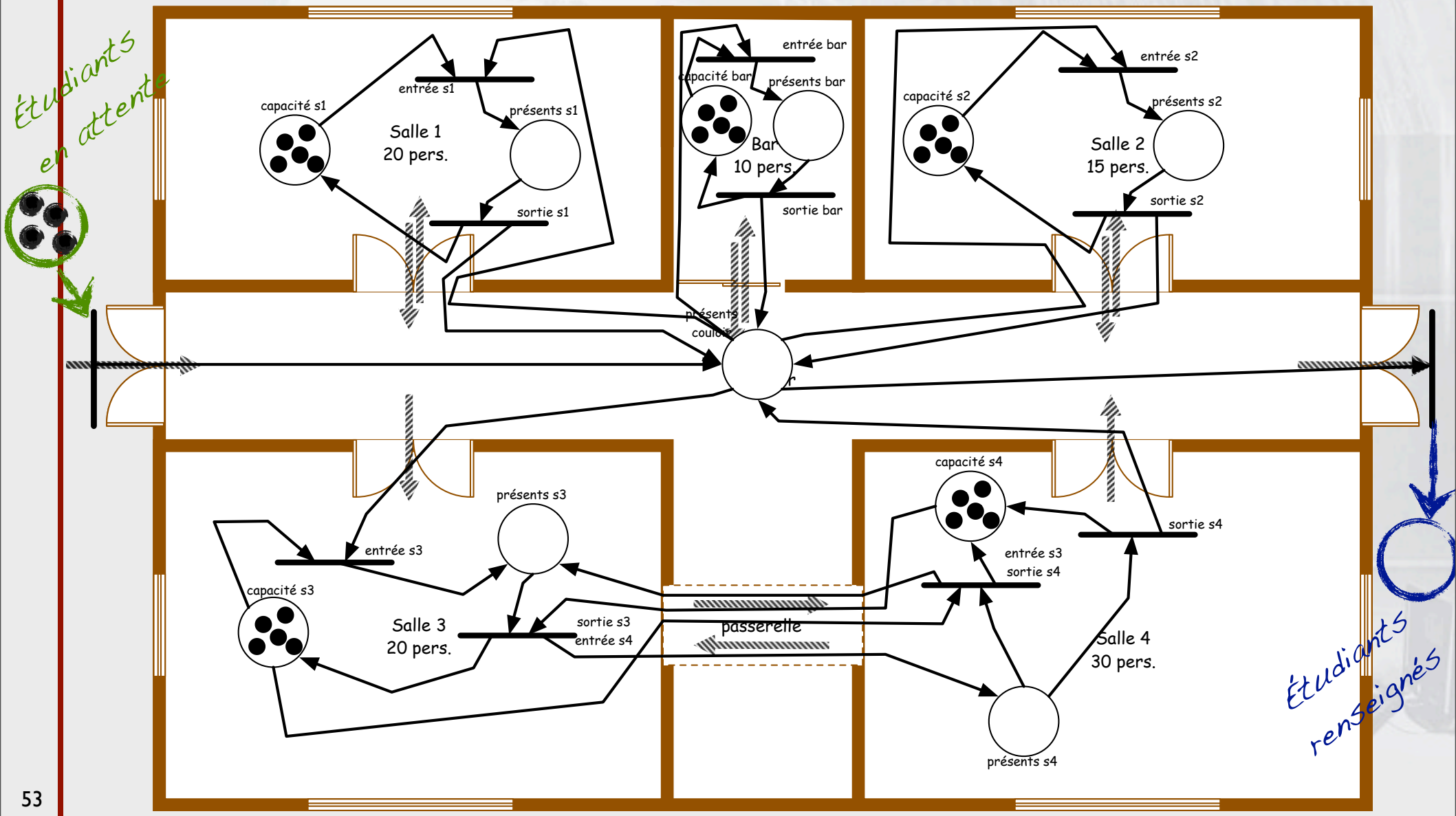
E. Desmontils

Exemple



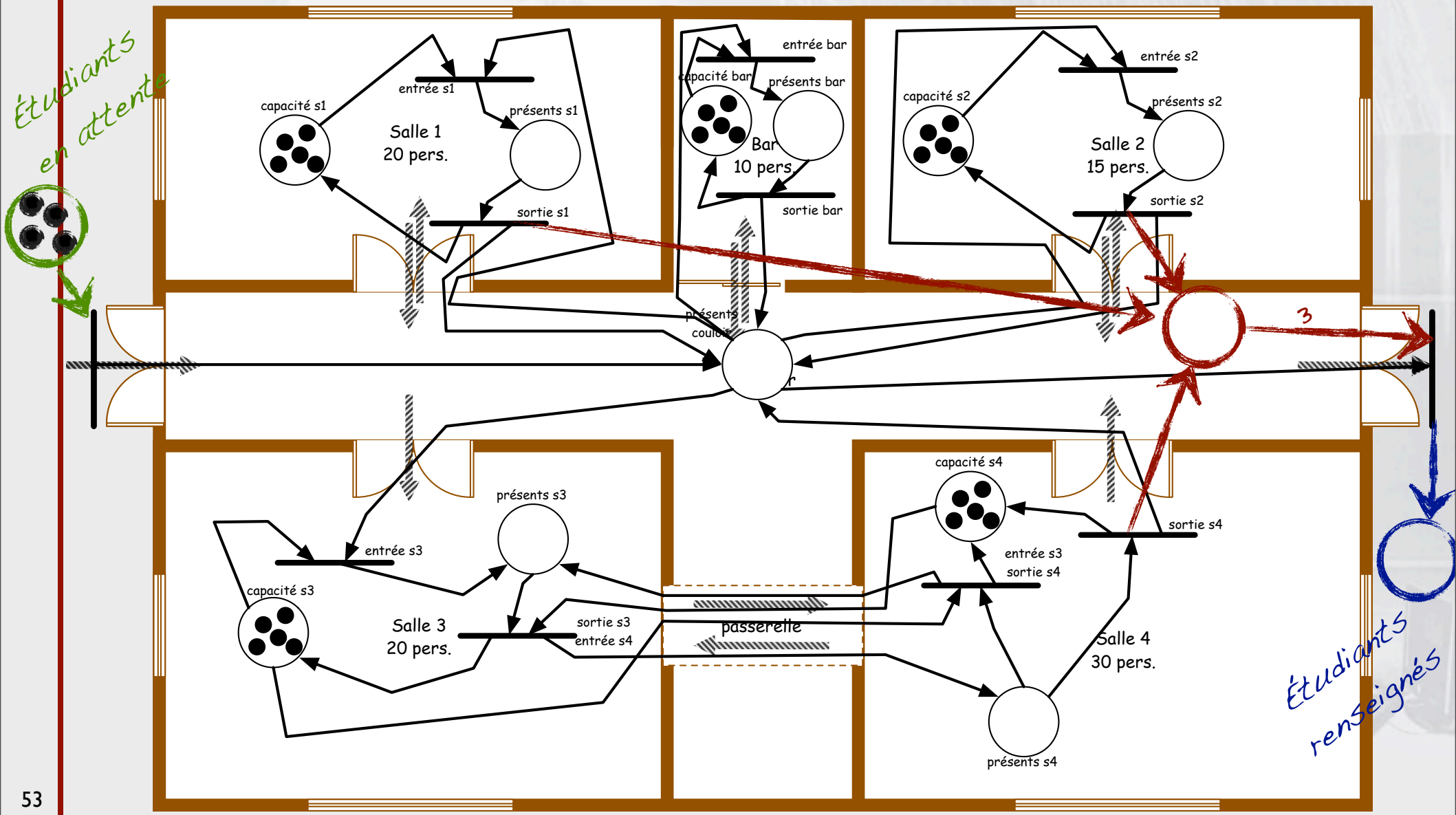
E. Desmontils

Exemple



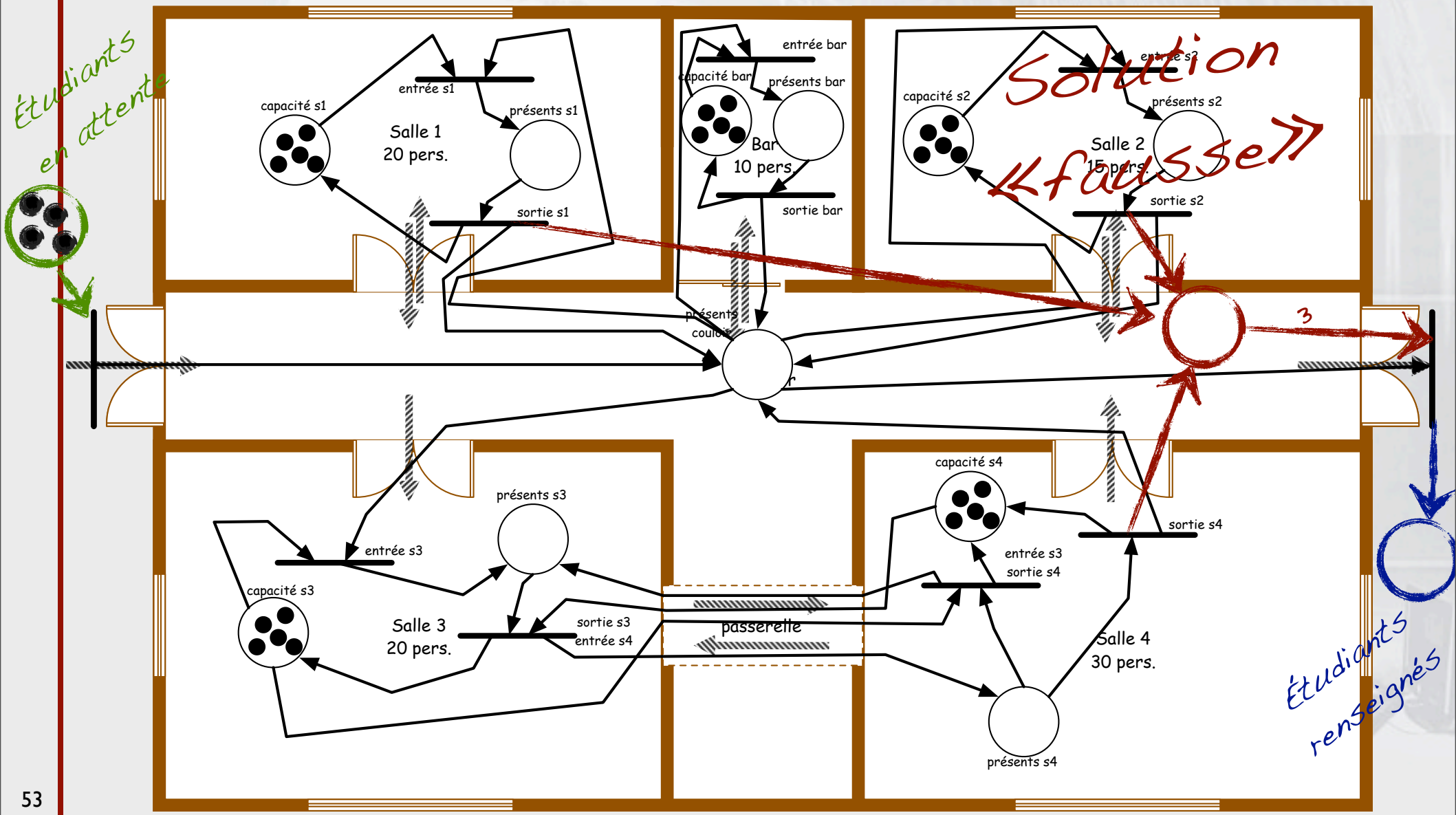
E. Desmontils

Exemple



E. Desmontils

Exemple



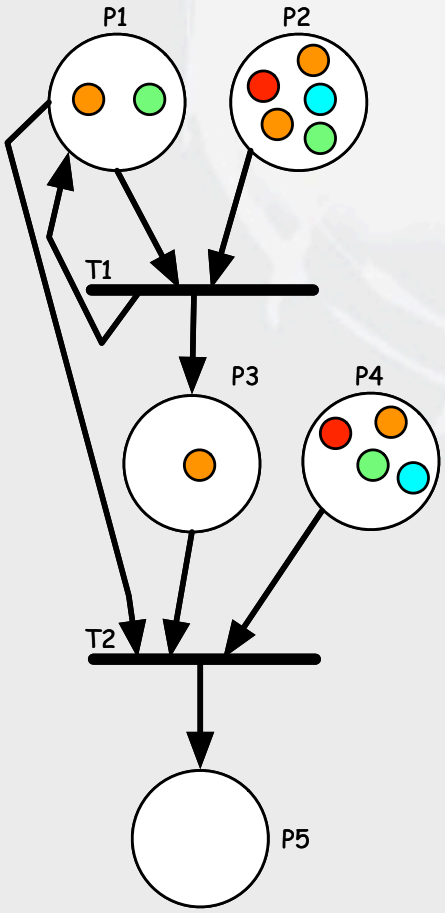
E. Desmontils

Réseaux de Petri colorés

- Extension du modèle : le RdP coloré
  - jetons typés (colorés)
  - transitions plus complexes : ensembles de fonctions relatives aux couleurs des jetons consommés et produits (transitions «colorées»)
- $\{P, T, A, M_0, \quad C_P, C_T, W^+, W^-\}$
  - W^- : $(p,t) \in PxT : C_T(t) \rightarrow \mathcal{M}(C_P(p))$
    - $\mathcal{M}(E)$: multi-ensemble sur E
  - W^+ : $(t,p) \in TxP : C_T(t) \rightarrow \mathcal{M}(C_P(p))$

E. Desmontils

Réseaux de Petri colorés

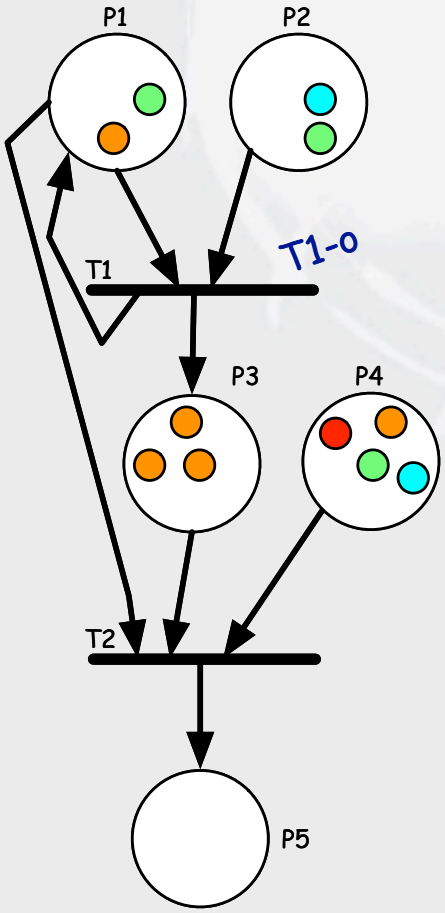


$$W^-(T_1) = \begin{pmatrix} v & rb & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ o & oor & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ v & vb & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \quad W^+(T_1) = \begin{pmatrix} vo & \emptyset & or & \emptyset & \emptyset \\ o & \emptyset & oo & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & vo & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$W^-(T_2) = \begin{pmatrix} v & \emptyset & o & or & \emptyset \\ v & \emptyset & r & bv & \emptyset \end{pmatrix} \quad W^+(T_2) = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & ro \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & vbb \end{pmatrix}$$

E. Desmontils

Réseaux de Petri colorés

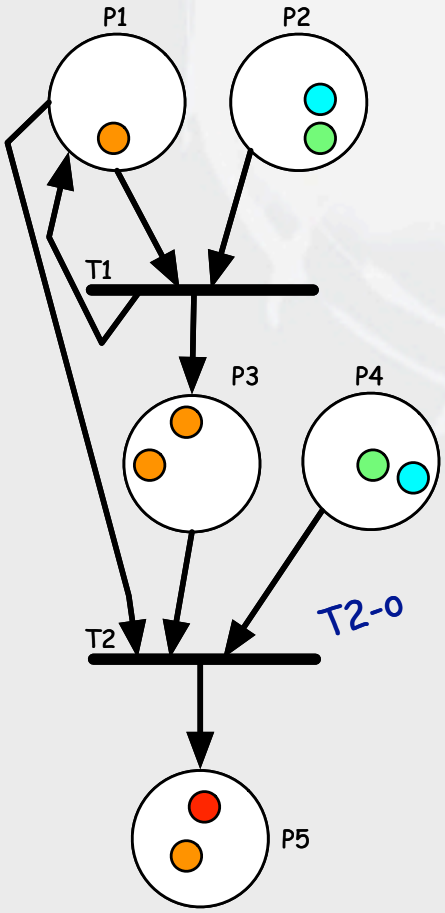


$$W^-(T_1) = \begin{pmatrix} v & rb & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ o & oor & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ v & vb & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \qquad W^+(T_1) = \begin{pmatrix} vo & \emptyset & or & \emptyset & \emptyset \\ o & \emptyset & oo & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & vo & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$W^-(T_2) = \begin{pmatrix} v & \emptyset & o & or & \emptyset \\ v & \emptyset & r & bv & \emptyset \end{pmatrix} \qquad W^+(T_2) = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & ro \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & vbb \end{pmatrix}$$

E. Desmontils

Réseaux de Petri colorés



$$W^-(T_1) = \begin{pmatrix} v & rb & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ o & oor & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ v & vb & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \quad W^+(T_1) = \begin{pmatrix} vo & \emptyset & or & \emptyset & \emptyset \\ o & \emptyset & oo & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & vo & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$W^-(T_2) = \begin{pmatrix} v & \emptyset & o & or & \emptyset \\ v & \emptyset & r & bv & \emptyset \end{pmatrix} \quad W^+(T_2) = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & ro \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & vbb \end{pmatrix}$$

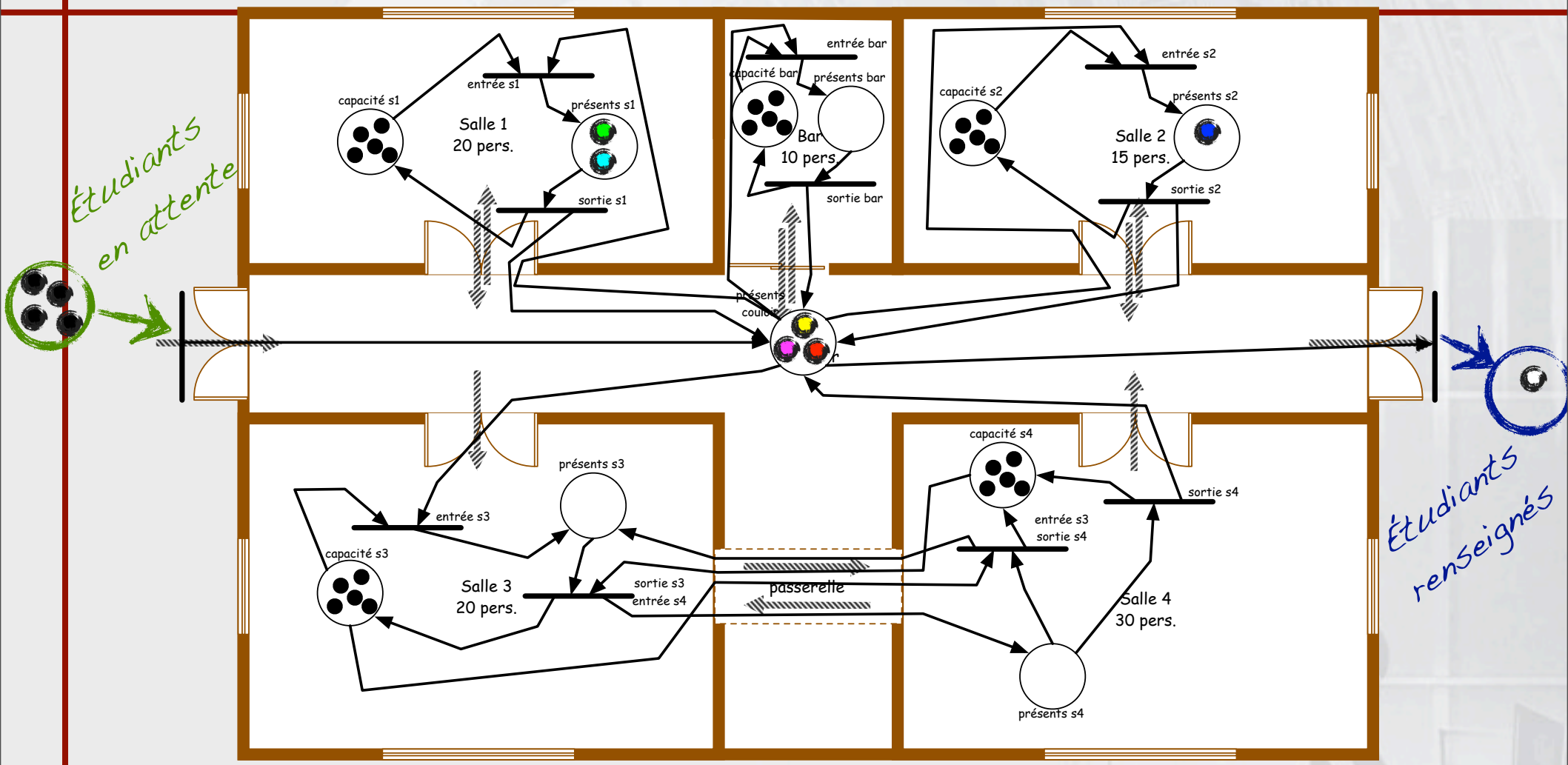
BY NC ND
E. Desmontils

Réseaux de Petri colorés

- Transition plus complexe
  - couleur : type
  - sémantique variable selon la place et la transition
- Modélisation du OU logique possible
  - il est possible de ne rien produire sur une place pourtant en sortie...

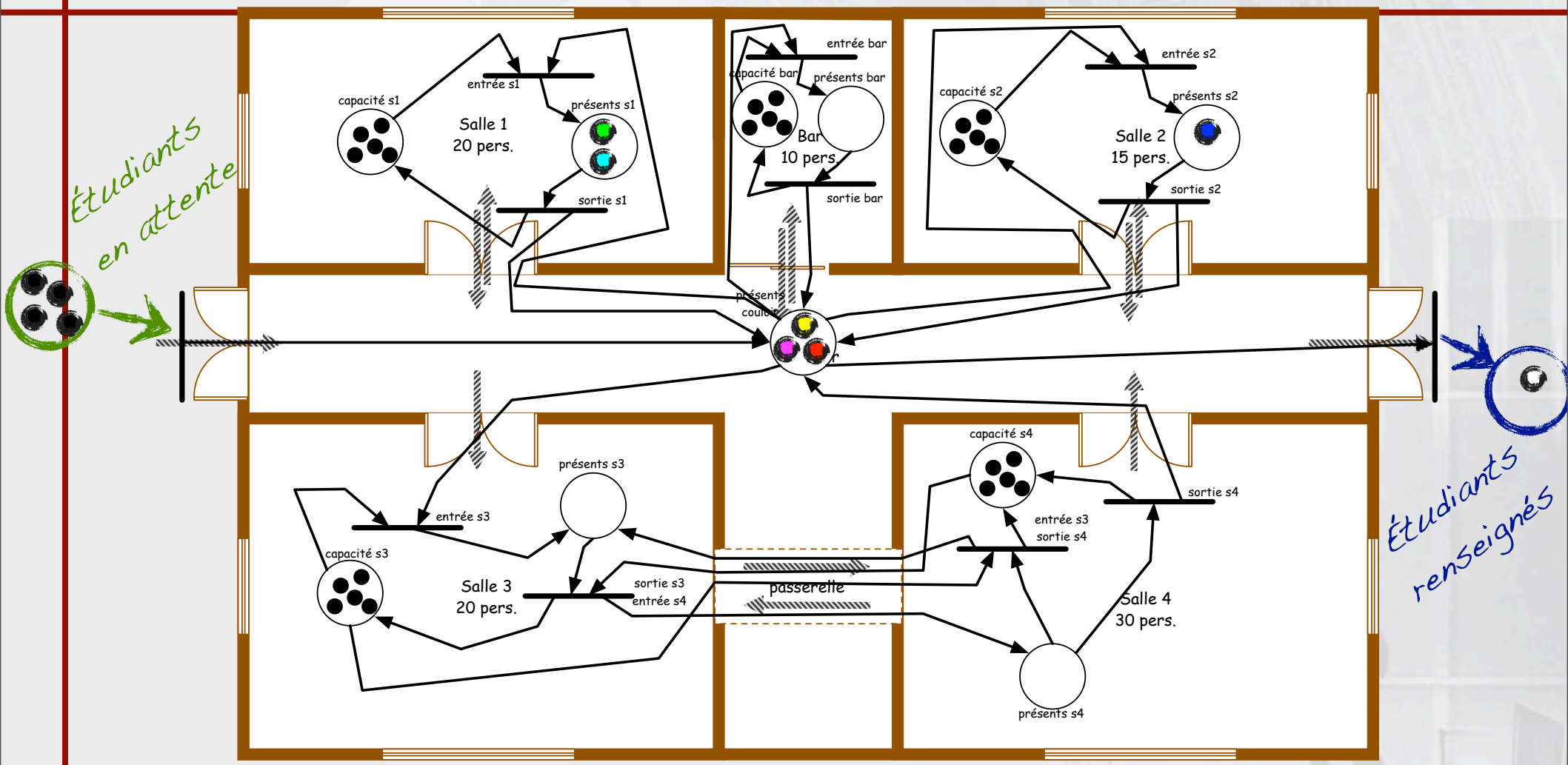
BY NC ND
E. Desmontils

Exemple



E. Desmontils

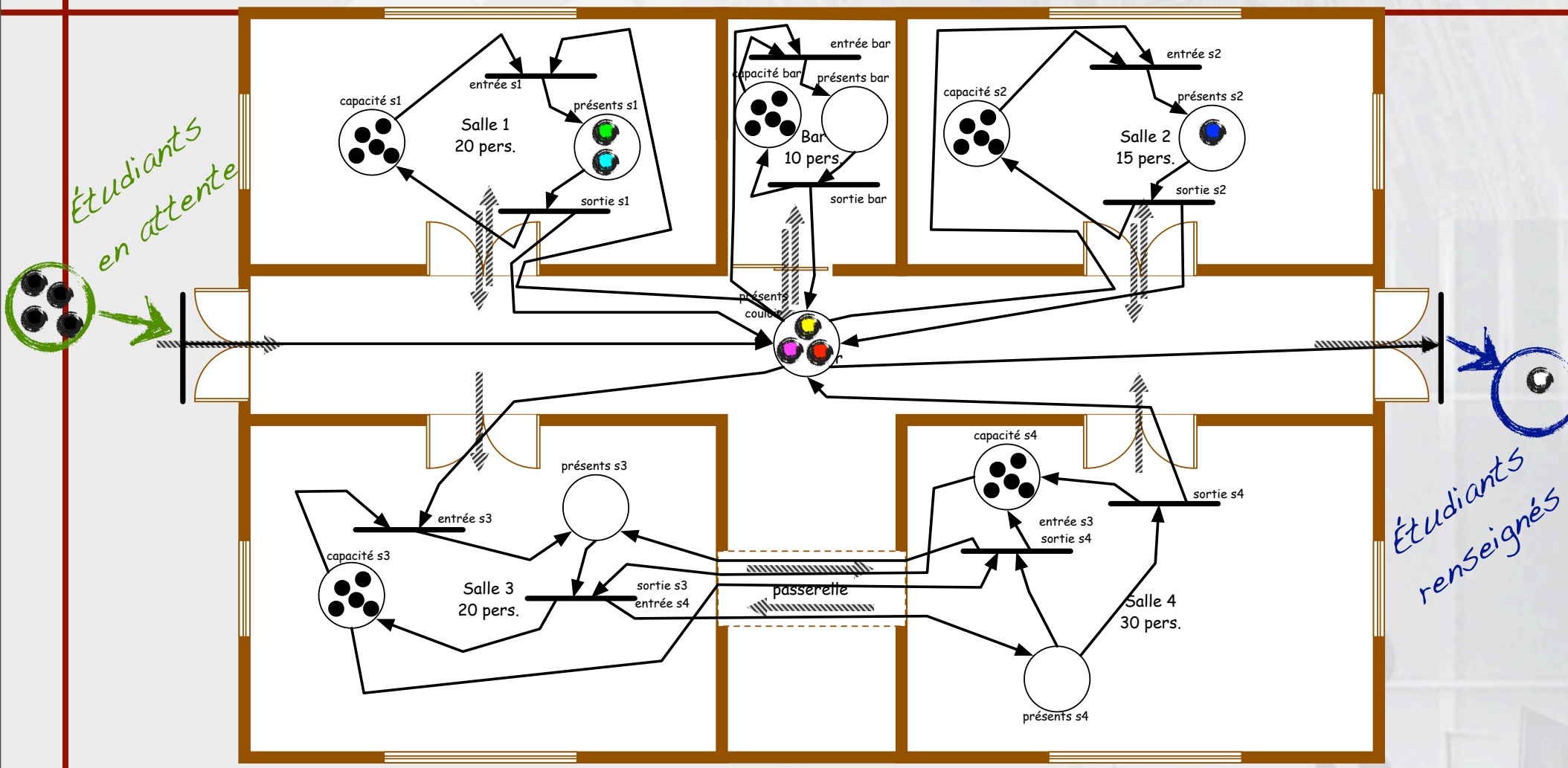
Exemple



Obligation de passage ?

E. Desmontils

Exemple

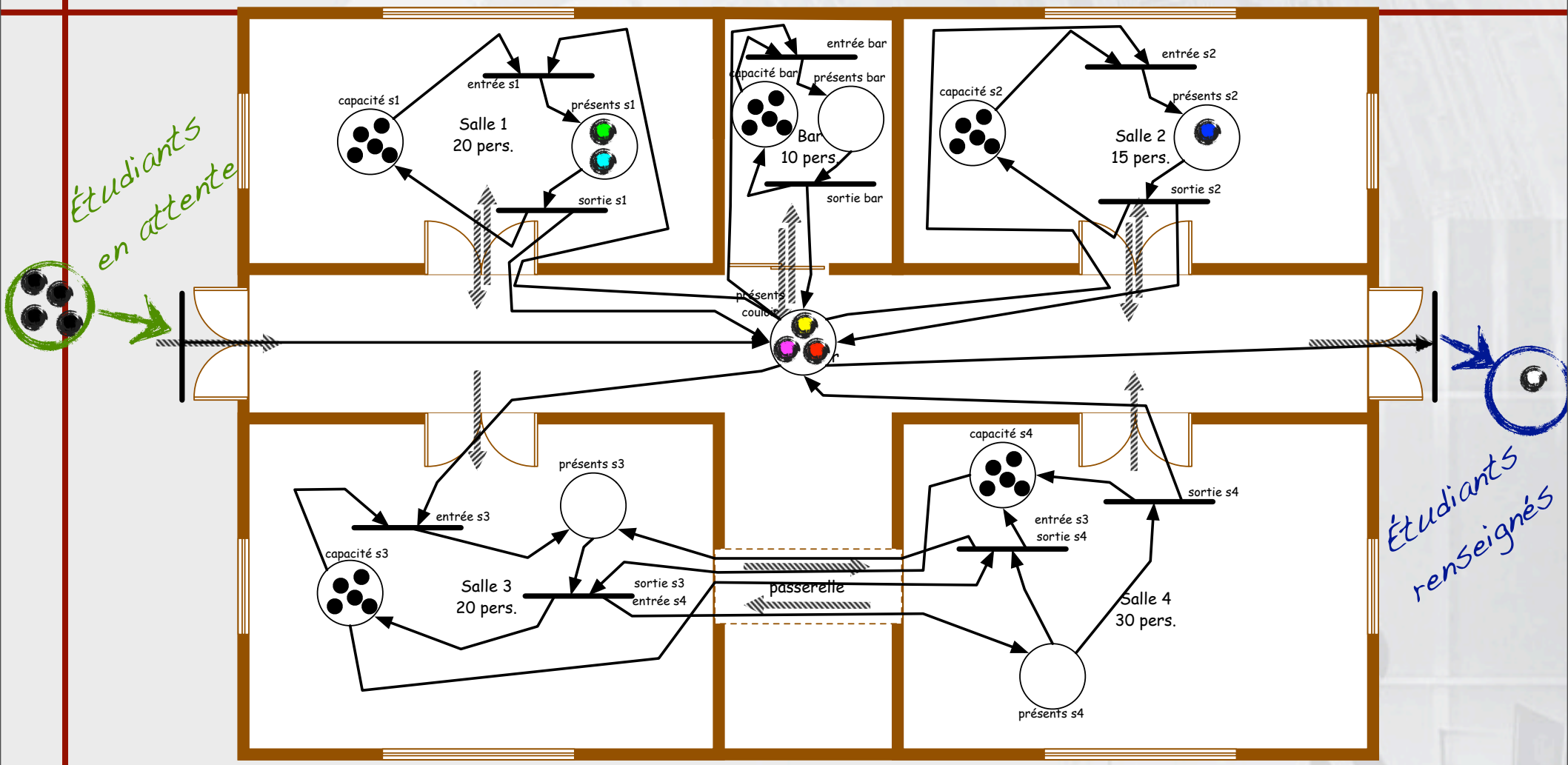


Obligation de passage ?

Coloration des jetons
- évolution de la couleur selon le parcours dans les salles
- à la sortie de chacune des salles : <c1, c2, c3>
- entrées : couleur indifférente... ou pas...

E. Desmontils

Exemple



Obligation de passage ?

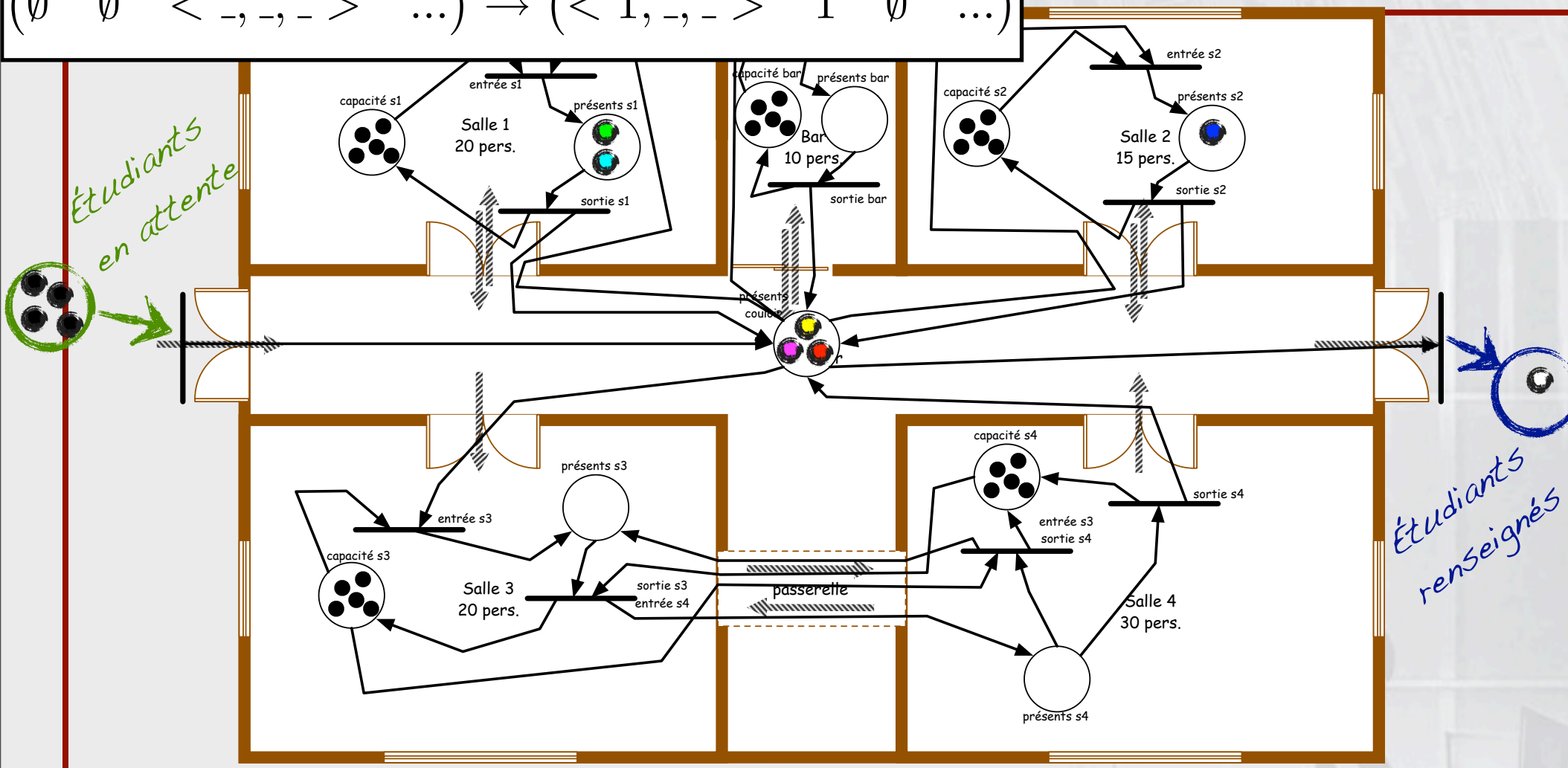
Coloration des jetons
- évolution de la couleur selon le parcours dans les salles
- à la sortie de chacune des salles : <c1, c2, c3>
- entrées : couleur indifférente... ou pas...

entrée de couloir = «noir» i.e. <0,0,0>
sortie de couloir = «blanc» i.e. <1,1,1>

BY NC ND
E. Desmontils

Exemple

$$(\emptyset \quad \emptyset \quad <\_,\_,\_> \quad \ldots) \rightarrow (<1,\_,\_> \quad 1 \quad \emptyset \quad \ldots)$$



Obligation de passage ?

Coloration des jetons
- évolution de la couleur selon le parcours dans les salles
- à la sortie de chacune des salles : <c1, c2, c3>
- entrées : couleur indifférente... ou pas...

entrée de couloir = «noir» i.e. <0,0,0>
sortie de couloir = «blanc» i.e. <1,1,1>

E. Desmontils

Mais aussi...

- Réseaux synchronisés,
  - déclenchement d'une transition, soumis à un événement extérieur
- Réseaux temporisés (P-temporisés, T-temporisés),
  - transition/place dure en certain temps
  - Réseaux stochastiques
- Réseaux temporels
  - fenêtre de déclenchement [min,max]
- Réseaux hiérarchiques...

BY NC ND
E. Desmontils

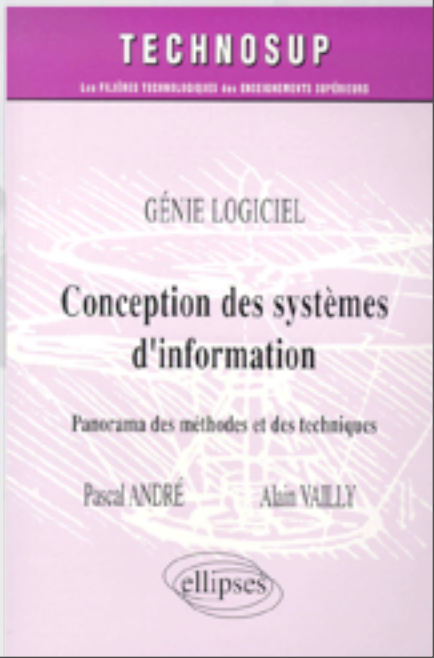
Bibliographie

- [PrX95], «Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production», J.-M. Proth & X. Xie, Masson, 1995
- [DaA97], «Du Grafcet aux réseaux de Petri», R. David & H. Alla, Hermes, 1997
- [AnV01], «Conception des systèmes d'information», P. André & A. Vailly, Ellipse, 2001
- [Cho06], «Les réseaux de Petri : un outil de modélisation», A. Choquet-Geniet, Dunod, 2006

E. Desmontils

Mentions

- La structure de ce cours, certains exemples voire certains transparents sont issus du cours d'Alain Vailly pour le modules S21I030 de l'année 2009-2010 (avec son aimable autorisation)
  - Cours en ligne e-miage : http://pagesperso.lina.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/vailly/Enseignement/EMIAGE/EnDev/ModuleB302EMiageV2.3/b302.html
  - Transparents du module S21I030 pour l'année 2009-2010
  - Livre : «Conception des systèmes d'information», P. André & A. Vailly, Ellipse, 2001
  - Fiches de TD et TP du module S21I030 pour l'année 2009-2010



Cette création est mise à disposition selon le Contrat
Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de Modification 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/
ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.